

Statistische Analysen zweidimensionaler Turbulenz

Als Diplomarbeit vorgelegt von

Michel Voßkuhle

8. August 2009

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Das Bild auf dem Umschlag stammt aus Abb. 5.7 (rechts) der vorliegenden Arbeit.

Version 1.2w (Korrekturen und stellenweise Ergänzungen eingearbeitet, weboptimiert)

Abstract

The work at hand investigates statistical properties of two-dimensional turbulence. The exploration of two-dimensional flows is driven by two reasons. On the one hand, flows in many geophysical systems and in plasma physics can be described as being quasi-two-dimensional, which explains the practical interest in this field of research. On the other hand, two-dimensional turbulence shows some striking differences as compared to the three-dimensional case, like the emergence of large-scale coherent structures. Despite these differences there are also universal features that the two have in common and one is eager to find them, as those universal features might be useful to solve the outstanding problem of turbulence.

In particular, this work deals with two rather distinct approaches. First, an established technique for the investigation of the three-dimensional turbulent energy cascade [see Friedrich; Peinke, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997)] is extended to the case of two-dimensional turbulence in the inverse energy cascade regime. Evidence is given, that the velocity increments $v(r)$ may be described by a Markov process, given the separation length r is greater than a certain length, the so called Markov–Einstein length. Furthermore it is shown, that the velocity increments obey a Fokker–Planck equation. This equation is deduced and inspires a simple approximation, which is able to reconstruct characteristic features of the increment statistics.

A second part is dedicated to the Lundgren–Monin–Novikov hierarchy (LMN hierarchy). The LMN hierarchy is a system of partial differential equations describing the evolution of the N -point probability density functions of divers properties of fluid flows, e.g. the velocity or the velocity increments. It can be directly obtained from the Navier–Stokes equations. This work studies the hierarchy for the vorticity and the vorticity increments in two-dimensional flows. The appearing terms, that cannot be handled analytically, are investigated numerically. This procedure leads to promising suggestions concerning a closure of the LMN hierarchy.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
I. Grundlagen	13
1. Grundgleichungen	15
1.1. Navier-Stokes-Gleichungen	15
1.1.1. Behandlung des Druckterms	16
1.1.2. Nichtlinear und nichtlokal	17
1.1.3. Reynolds-Zahl	17
1.2. Wirbeltransportgleichung	18
1.3. Ein erster Schritt in zwei Dimensionen	19
1.4. Turbulente Längenskalen	19
1.4.1. Geschwindigkeitsautokorrelation	20
1.4.2. Taylor-Mikroskala	20
1.4.3. Integrale Länge	21
2. Kaskaden	23
2.1. Richardson Kaskade	23
2.2. Nichtviskose Erhaltungsgrößen	24
2.2.1. Mittlere kinetische Energie	24
2.2.2. Enstrophie (in zwei Dimensionen)	25
2.3. Energiespektrum	25
2.4. Energiefluß in drei Dimensionen	26
2.5. Kolmogorov-Spektrum (K41)	27
2.6. Energiefluß in zwei Dimensionen	28
2.6.1. Fjørtofts Theorem	29
2.6.2. Die inverse Energiekaskade nach Kraichnan	29
2.7. Charakterisierung der Kaskade durch Geschwindigkeitsinkremente	29
3. Deutung der Kaskade als Markow-Prozess	33
3.1. Die Markow-Eigenschaft	33
3.2. Chapman-Kolmogorov-Gleichung	34
3.3. Kramers-Moyal-Entwicklung und Fokker-Planck-Gleichung	35
3.3.1. Kramers-Moyal-Entwicklung	35
3.3.2. Pawulas Lemma	36
3.3.3. Fokker-Planck-Gleichung	36

3.4. Überblick	36
4. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie	39
4.1. Einführende Überlegungen	39
4.2. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizität in zwei Dimensionen	41
4.2.1. Behandlung des Advektionsterms	42
4.2.2. Behandlung des Dissipationsterms	42
4.2.3. Behandlung des Kraftterms	42
4.2.4. Entwicklungsgleichung für die Vortizitätswahrscheinlichkeitsdichte	42
4.2.5. Alternative: Kopplung an die Zweipunktverbundwahrscheinlichkeitsdichte	43
4.3. Verbundwahrscheinlichkeitsdichte der Vortizität in zwei Dimensionen	44
4.4. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizitätsinkremente in zwei Dimensionen	45
II. Ergebnisse	49
5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade	51
5.1. Charakterisierung der benutzten Daten	51
5.2. Markow-Eigenschaft	53
5.2.1. Numerische Behandlung	55
5.2.2. Ergebnisse	56
5.3. Markow-Einstein-Länge	58
5.4. Kramers-Moyal-Koeffizienten	63
5.4.1. Beschreibung des Vorgehens	63
5.4.2. Auswertung	65
5.5. Fokker-Planck-Gleichung	70
5.6. Diskussion	72
6. Schließungsansatz für die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie	75
6.1. Vortizitätsinkremente	75
6.1.1. Wahrscheinlichkeitsdichten der Vortizitätsinkremente	75
6.1.2. Besprechung der einzelnen Terme	76
6.1.3. Zwischenresümee	78
6.2. Bedingte mittlere Geschwindigkeitsfelder	78
6.2.1. Bedingt auf die Vortizität an zwei Orten	78
6.2.2. Bedingt auf die Vortizität an drei Orten	79
6.3. Diskussion	81
7. Zusammenfassung und Ausblick	83

III. Anhang	85
A. Mathematische Grundlagen	87
A.1. Isotrope Tensoren	87
A.2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	88
A.2.1. Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsdichten	88
A.2.2. Verbund- und bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten	89
B. Verschiedene Rechnungen und Herleitungen mit detaillierteren Schritten	91
B.1. Geschwindigkeitsautokorrelation	91
B.2. Kraichnans Überlegungen zur inversen Energiekaskade	92
C. Anmerkungen zur Numerik	97
C.1. <i>Binning</i>	97
Danksagung	99
Symbolverzeichnis	101
Literaturverzeichnis	105

Einleitung

“Where shall I begin, please your Majesty?” he asked.
“Begin at the beginning,” the King said, very gravely, “and go on till you come to the end: then stop.”

(Lewis Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*)

Wenn man als Physiker nach seinem Forschungsgebiet gefragt wird, und man antwortet, man beschäftige sich mit Turbulenz, ist eine häufige erste Assoziation: “Ah, Turbulenzen!” Das ist etwas, das jeder entweder aus eigener Erfahrung, oder zumindest aus Erzählungen kennt: Durchfliegt ein Flugzeug ein Gebiet, in dem das Fluid (die Luft) turbulent strömt, unterliegt der Auftrieb starken Schwankungen und das Flugverhalten wird kurzzeitig instabil.

Aber was bedeutet es nun, wenn ein Fluid turbulent strömt? In Abbildung 1 werden Aufnahmen eines Vulkanausbruchs gezeigt. In den Staubwolken, die bei der Eruption mit großer Wucht ausgestoßen werden, erkennt man einige typische Charakteristika turbulenter Verhaltens. Schon auf den ersten Blick offenbaren die Bilder den hohen Grad an Komplexität und Irregularität, der turbulente Strömungen kennzeichnet. Insbesondere veranschaulichen die gezeigten Vergrößerungen aber auch das Phänomen der Selbstähnlichkeit, wonach turbulente Strömungen, unabhängig von der Skala auf der man sie betrachtet, jeweils ähnliche Strukturen zeigen.

Die Bilder vom Vulkanausbruch wurden nicht etwa gewählt, weil sie ein geläufiges Beispiel turbulenter Strömungen sind, sondern weil sie einige ihrer Eigenschaften besonders gut wiedergeben. Im Alltag begegnet uns turbulentes Verhalten (glücklicherweise) wesentlich häufiger als Vulkanausbrüche. Die Mischvorgänge in Verbrennungsmotoren und Heizöfen werden durch Turbulenz erheblich beschleunigt und sorgen so für eine effektivere Verbrennung. Turbulenz sorgt auch dafür, dass die schädlichen Abgase von Autos und Industrieanlagen schnell verdünnt werden und keine Gefahr für Lebewesen in ihrer Nähe darstellen. Andererseits verhält sich ebenso die Umströmung von Fahrzeugen turbulent und erhöht dadurch den Luftwiderstand, der auf sie wirkt.

Nun ist im Titel dieser Arbeit von *zweidimensionaler* Turbulenz die Rede und die Frage liegt nahe, ob es so etwas überhaupt gibt. Als theoretischer Physiker darf man sich über diese Zweifel hinwegsetzen. Es macht nämlich, unabhängig von seiner Relevanz für das alltägliche Leben, durchaus Sinn sich mit einem (vermeintlich) simpleren Modell zu beschäftigen, um Rückschlüsse auf das Verhalten der vollen dreidimensionalen Gleichungen ziehen zu können. Allerdings erweist sich die Untersuchung zweidimensionaler Turbulenz als gar nicht so akademisch, wie man zunächst vermuten könnte. Es ist nämlich so, dass

Einleitung



Abbildung 1.: Aufnahme vom Ausbruch des Mount St. Helens am 18. Mai 1980. Von links nach rechts verdoppelt sich von Bild zu Bild die Vergrößerungsstufe – man findet auf verschiedenen Skalen ähnliche Muster wieder. Das benutzte Foto stammt vom U.S. Geological Survey's Cascades Volcano Observatory (<http://vulcan.wr.usgs.gov/>).

sich großskalige Strömungen in der Atmosphäre oder in Ozeanen üblicherweise in dünnen Schichten abspielen, die untereinander nicht vermischen. Aus diesem Grund bestand schon lange der Verdacht, dass man sie in guter Näherung als zweidimensional betrachten kann.

Kraichnan (1967) stellte dann durch theoretische Überlegungen fest, dass zweidimensionale Strömungen im Vergleich zu dreidimensionalen einen grundlegenden Unterschied im Verhalten des Energieflusses aufweisen müssen (siehe Kapitel 2). Seine Theorie konnte kurze Zeit später anhand von numerischen Simulationen durch Lilly (1969) bestätigt werden. Schließlich gelang es Boer und Shepherd (1983) die Gültigkeit dieser Theorie für Messdaten aus atmosphärischen Strömungen nachzuweisen. Mittlerweile ist es sogar möglich, Laborexperimente durchzuführen, die das von Kraichnan vorhergesagte Verhalten zeigen (Paret und Tabeling 1997).

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass Turbulenz, sei es in zwei oder drei Dimensionen, ein allgegenwärtiges Phänomen ist. Umso erstaunlicher ist es, dass es der Physik bisher noch nicht gelungen ist, sie theoretisch greifbar zu machen. Die Grundgleichungen, die die Bewegung von Flüssigkeiten beschreiben, die Navier-Stokes-Gleichungen, sind seit Navier (1823) bekannt. Man geht davon aus, dass diese Gleichungen die Flüssigkeitsdynamik vollständig beschreiben, allerdings kann man sie bestenfalls in Spezialfällen lösen. Allgemein zeigen turbulente Strömungen ein derart komplexes Verhalten, dass eine Beschreibung all ihrer Einzelheiten vollkommen hoffnungslos ist (vgl. Abbildung 1). Andererseits ist die Kenntnis aller Details der Strömung auch unnötig, interessanter sind mittlere Größen und Wahrscheinlichkeiten. Daher sucht man nach einer statistischen Beschreibung der Turbulenz.

Einen innovativen Zugang zu solch einer statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen lieferten Friedrich und Peinke (1997a), indem sie die Entwicklung von Geschwindigkeitsinkrementen als stochastischen Prozess in der Skala deuteten. Dieser Ansatz beruht nicht auf den Navier-Stokes-Gleichungen, lässt sich aber andererseits auch nicht aus ihnen begründen. Daher muss er durch Experimente oder numerische Simulationen gerechtfertigt werden. Dieser Methode ist ein großer Teil der vorliegenden Arbeit gewidmet, der die Ideen von Friedrich und Peinke auf den speziellen Fall der zweidimensionalen Turbulenz erweitert.

Neben phänomenologischen Zugängen, wie dem gerade besprochenen, gibt es auch solche, die sich direkt auf die Navier-Stokes-Gleichungen berufen. Zu ihnen gehört die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie, mit der es gelingt, Entwicklungsgleichungen für Wahrscheinlichkeitsdichten, z. B. der Geschwindigkeit oder der Vortizität, direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen abzuleiten. Diese Entwicklungsgleichungen sind allerdings, wie die meisten Ansätze, die sich direkt aus den Grundgleichungen ableiten, nicht geschlossen. Man kann jedoch heutzutage mithilfe numerischer Simulationen die nicht geschlossenen Terme schätzen und so Ansatzpunkte für eine mögliche Schließung finden. Hier setzt ein Teil der vorliegenden Arbeit an, der sich mit der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie für Vortizitätsinkremente beschäftigt.

Inhaltsübersicht

Insgesamt lässt sich die Arbeit in zwei Teile gliedern. Ein erster Teil beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen, auf denen sie fußt. Dabei wird zunächst, angefangen bei den Grundgleichungen der Fluidodynamik in Kapitel 1 und weiterführend über einige klassische Modelle der Turbulenzforschung in Kapitel 2, das wissenschaftliche Umfeld beleuchtet, in das die nächsten beiden Kapitel gebettet sind. Das erste der beiden folgenden Kapitel, "Deutung der Kaskade als Markow-Prozess", beschreibt die bereits erwähnten Ideen von Friedrich und Peinke im Detail und liefert einen Überblick über die dort benutzten mathematischen Konzepte. Das letzte Kapitel in diesem ersten Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie. Letztere wird dort in der Form, in der sie im Verlauf der Arbeit benötigt wird, detailliert hergeleitet.

Der zweite große Teil der vorliegenden Arbeit präsentiert Ergebnisse, die unter Ausnutzung der Methoden aus dem ersten Teil gewonnen wurden. Diese Ergebnisse wurden in erster Linie mithilfe einer numerischen Simulation zweidimensionaler Turbulenz erzielt, welcher der erste Abschnitt von Kapitel 5 gewidmet ist. Im Fortgang dieses Kapitels wird die Analyse von Friedrich und Peinke (1997a) auf den speziellen Fall zweidimensionaler Turbulenz ausgeweitet. Das zweite Kapitel in diesem Teil der Arbeit stellt Ergebnisse vor, die in Richtung einer Schließung der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie führen.

Schließlich wird im dritten Teil, dem Anhang, einiges angefügt, was für die Nachvollziehbarkeit der Arbeit als wichtig oder einfach als mittelenswert erachtet wurde.

Teil I.
Grundlagen

1. Grundgleichungen

1.1. Navier-Stokes-Gleichungen

Um die Grundgleichungen zur Beschreibung einer Flüssigkeit herzuleiten, benötigt man zwei Bilanzgleichungen – eine für die Dichte $\rho(\mathbf{x}, t)$, die die Massenerhaltung beschreibt, und eine für die Impulsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, die das zweite Newtonsche Axiom berücksichtigt. Hierbei bedeutet $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am Ort \mathbf{x} zur Zeit t . Die Bilanzgleichung für die Dichte ist einfach die Kontinuitätsgleichung und führt im Falle inkompressibler Flüssigkeiten, d.h. die Dichte ρ ist unabhängig von Ort \mathbf{x} und Zeit t , auf die sogenannte Inkompressibilitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.1)$$

In der Bilanzgleichung für die Impulsdichte müssen alle auftretenden Volumen- und Oberflächenkräfte berücksichtigt werden. Für inkompressible newtonsche¹ Flüssigkeiten erhält man schließlich

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

mit folgenden Definitionen

$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)/\rho$ ist der Quotient aus dem Druck $P(\mathbf{x}, t)$ und der Dichte ρ , üblicherweise einfach Druck genannt;

$\nu = \eta/\rho$ ist die kinematische Viskosität und ergibt sich aus der dynamischen Viskosität η und der Dichte ρ ;

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ beinhaltet alle von außen aufgeprägten Volumenkraftdichten, wie die Gravitation oder die Corioliskraft.

Die drei gekoppelten Differentialgleichungen (1.2) für die drei Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes $u_i(\mathbf{x}, t)$ heißen, nach Claude-Louis Navier (1823) und George Gabriel Stokes (1843), die Navier-Stokes-Gleichungen. Sie müssen durch Rand- und Anfangsbedingungen ergänzt werden. In üblichen physikalischen Systemen sind die Randbedingungen

¹Newtonsche Flüssigkeiten haben lineare Materialeigenschaften, zu ihnen gehören die meisten gängigen Flüssigkeiten. Nichtnewtonsche Flüssigkeiten verändern, je nach Stärke der Scherung die auf sie wirkt, ihre viskosen Eigenschaften. Ein häufig herangezogenes Beispiel ist eine Mischung aus Stärke und Wasser über die man in schnellen Bewegungen laufen kann, aber untergeht sobald man stehen bleibt. Für eine detailliertere Darstellung sei z. B. auf Faber (1995) verwiesen.

1. Grundgleichungen

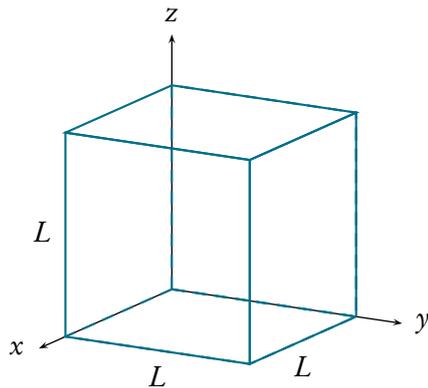


Abbildung 1.1.: Periodische Randbedingungen in drei Dimensionen. Nach der Länge L wiederholt sich das physikalische System.

durch die Impermeabilität der Ränder und die Haftbedingung (engl. *no-slip condition*) gegeben. Für unbewegte Ränder lauten diese

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\delta V} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\delta V} = 0,$$

wobei \mathbf{n} die Flächennormale auf den Rand und δV den Rand selbst bezeichnet.

Eine zweite, besonders in numerischen Simulationen aber auch in theoretischen Modellen anzutreffende Möglichkeit, die Randbedingungen zu wählen, sind periodische Ränder. Dazu stellt man sich einen Würfel der Seitenlänge L vor, so dass für alle Geschwindigkeiten $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in diesem Quader, und damit insbesondere auf dessen Rand, für alle Zeiten t und alle Orte $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt

$$\mathbf{u}(x_1 + lL, x_2 + mL, x_3 + nL, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

wobei l, m und n beliebige ganze Zahlen sind (siehe auch Abb. 1.1).

1.1.1. Behandlung des Druckterms

In Gleichung (1.2) tritt neben dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ noch der Druck $p(\mathbf{x}, t)$ auf. Letzterer lässt sich allerdings aus dem Geschwindigkeitsfeld bestimmen. Dazu bildet man zunächst die Divergenz von Gleichung (1.2) und nutzt die Inkompressibilitätsbedingung, Gl. (1.1), aus. Man erhält so, bei divergenzfreien Volumenkräften $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, die Poisson-Gleichung

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(\mathbf{x}, t). \quad (1.3)$$

Diese Gleichung lässt sich mittels der Greenschen Funktion des Laplace Operators (siehe Friedrich 2007) oder durch Invertierung des Laplace-Operators im Fourier-Raum (siehe Frisch 1996) lösen.

²Bei dieser Schreibweise wurde die Einsteinsche Summenkonvention benutzt. Diese gilt, wo anwendbar, auch für den Rest der vorliegenden Arbeit.

1.1.2. Nichtlinear und nichtlokal

Nachdem alle wichtigen Fakten zu den Navier-Stokes-Gleichungen zusammengetragen sind, bietet es sich an dieser Stelle an, kurz der Fragestellung nachzugehen, warum sie sich seit bald zweihundert Jahren einer erfolgreichen theoretischen Behandlung widersetzen. Für diese Tatsache sind in erster Linie zwei Aspekte verantwortlich: Die Navier-Stokes-Gleichungen sind sowohl *nichtlinear* als auch *nichtlokal*.

Die *Nichtlokalität* verbirgt sich im Druckterm. In die Lösung der zugehörigen Poisson-Gleichung (1.3) gehen die Geschwindigkeiten $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ an jedem Raumpunkt \mathbf{x} ein. Die Beschreibung der Entwicklung der Geschwindigkeit an einem Raumpunkt setzt also die Kenntnis des gesamten Geschwindigkeitsfeldes voraus.

Die *Nichtlinearität*, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, verbietet, einfach gesprochen, die Anwendung des Superpositionsprinzips. Die Kenntnis einer speziellen Lösung führt also keineswegs auf die allgemeine Lösung, wie es etwa beim harmonischen Oszillator der Fall ist. Die allgemeine Theorie nichtlinearer Systeme (siehe z. B. Argyris et al. 1997; Strogatz 2001) sagt desweiteren, dass diese sehr sensibel auf kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen reagieren und je nach Einstellung der Kontrollparameter bis hin zum Chaos ein breites Spektrum an Verhalten zeigen können.

1.1.3. Reynolds-Zahl

Um sich über den Einfluss der von außen aufgeprägten (Kontroll-) Parameter klar zu werden, macht man die Navier-Stokes-Gleichungen (1.2) mit folgender Transformation dimensionslos

$$\mathbf{u} \rightarrow \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t \rightarrow \frac{t}{T}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad p \rightarrow \frac{pL}{U^2}, \quad \mathbf{f} \rightarrow \frac{\mathbf{f}T}{U^2},$$

wobei L eine charakteristische Länge, T eine charakteristische Zeit und $U = L/T$ eine charakteristische Geschwindigkeit sind. Man erhält

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4)$$

mit der *Reynolds-Zahl* (Reynolds 1895)

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}.$$

An Gleichung (1.4) liest man ab, dass die Reynolds-Zahl, Re , der einzige Kontrollparameter ist – skalierte Systeme mit gleichem Re verhalten sich geometrisch ähnlich (*Ähnlichkeitsprinzip*). Diese Tatsache ermöglicht z. B. Ingenieuren, die aero- bzw. hydrodynamischen Eigenschaften ihrer Konstruktionen an skalierten Modellen im Windkanal zu testen.

Eine andere Sichtweise der Reynolds-Zahl liefert die folgende Überlegung: Ist eine turbulente Strömung durch die oben eingeführten charakteristischen Größen U und L gekennzeichnet, so lässt sich der dissipative Term durch $\nu U/L^2$ abschätzen; für den

1. Grundgleichungen

advektiven Term gilt die Abschätzung U^2/L . Dementsprechend gibt die Reynolds-Zahl gerade das Verhältnis von Advektion zu Diffusion an

$$\text{Re} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu}.$$

Osborne Reynolds (1895) konnte in Experimenten an flüssigkeitsdurchströmten Rohren zeigen, dass es einen kritischen Wert für Re gibt. Strömungen mit einer Reynolds-Zahl kleiner dieser kritischen Reynolds-Zahl verhalten sich *laminar*. Laminare Strömungen kann man sich als einen Zustand vorstellen, in dem die Flüssigkeit in Schichten strömt, die sich nicht vermischen. Ab der kritischen Reynolds-Zahl setzt dann turbulentes Verhalten ein. Es kommt zu Verwirbelungen und die Schichten durchmischen sich bei steigender Reynolds-Zahl immer stärker, bis der Zustand der *vollentwickelten Turbulenz* erreicht ist. Dieser Übergang zur vollentwickelten Turbulenz wird sehr schön durch photographische Aufnahmen illustriert, die in Bildbänden wie dem von van Dyke (1982) zu finden sind.

1.2. Wirbeltransportgleichung

Die *Wirbelstärke*, oder auch *Vortizität*, ist definiert als die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.5)$$

Die zugehörige Entwicklungsgleichung erhält man durch Rotationsbildung der Navier-Stokes-Gleichungen (1.2), sie heißt *Wirbeltransportgleichung*³

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Um die Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in Gleichung (1.6) zu berechnen, benutzt man das, aus der Elektrostatik bekannte, Biot-Savart-Gesetz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'^{4,5}.$$

Die Korrespondenz zur Elektrostatik ergibt sich, wenn man in Gleichungen (1.1) und (1.5) die Vortizität $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ durch die magnetische Induktion und die Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ durch die elektrische Stromdichte ersetzt.

³Auch wenn hier der Singular genutzt wird handelt es sich, wie bei den Navier-Stokes-Gleichungen (1.2), wieder um drei gekoppelte Differentialgleichungen.

⁴Genaugenommen dürfte man hier noch eine beliebige Potentialströmung $\mathbf{u}_{pot}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)$ addieren.

⁵In dieser Formulierung gilt das Gesetz nur in drei Dimensionen; in zwei Dimensionen ändert sich der Integralkern (siehe Abschnitt 1.3).

1.3. Ein erster Schritt in zwei Dimensionen

Is this space of our couple of hours too dimensional for you, temporiser?

(James Joyce, *Finnegans Wake*)

Überträgt man die bisherigen Ergebnisse, d. h. beschränkt man die Bewegung der Flüssigkeit und damit die Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, auf zwei Dimensionen, ergeben sich einige grundlegende Unterschiede zum dreidimensionalen Fall. Hat das Geschwindigkeitsfeld nur zwei Komponenten, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), 0)$, die nur vom Ort in der Ebene, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$, abhängen, so reduziert sich die Vortizität auf ein Pseudoskalar $\omega(\mathbf{x}, t)$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}, t) \\ u_2(\mathbf{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}.$$

Die Wirbeltransportgleichung (1.6) wird zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t) + \tilde{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.7)$$

wobei $\tilde{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\mathbf{x}, t)$. In zwei Dimensionen verschwindet also der sogenannte Wirbelstreckungsterm $\omega(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ⁶. Außerdem verändert sich die Greensche Funktion zum Laplace-Operator, was zur Folge hat, dass das Biot-Savart-Gesetz in 2d

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \omega(\mathbf{x}', t) \cdot \mathbf{e}_3 \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d\mathbf{x}' \quad (1.8)$$

lautet. Auch hier kann wieder eine beliebige Potentialströmung addiert werden.

Es treten also grundlegende Unterschiede zwischen Flüssigkeitsströmungen in zwei und in drei Dimensionen auf. Andererseits bleiben beim Übergang zum zweidimensionalen Fall andere Eigenschaften erhalten. So ist Gleichung (1.7) genau wie Gleichung (1.6), durch das Auftreten des advektiven Terms, sowohl nichtlinear als auch nichtlokal. Dieses Ambiguum von zum Teil gleichen, zum Teil aber auch sehr unterschiedlichen Verhalten der Strömung in zwei bzw. drei Dimensionen, wird im Folgenden noch häufiger anzutreffen sein.

1.4. Turbulente Längenskalen

In Abschnitt 1.1.3 wurde gezeigt, wie über die Einführung der Reynolds-Zahl die Navier-Stokes-Gleichungen dimensionslos gemacht werden können. Dimensionlos bedeutet aber nicht, dass das beschriebene Fluid sich auf allen Skalen gleich verhält. Im Gegenteil, bei

⁶Der Name rührt daher, dass dieser Term in dreidimensionalen Strömungen die Konzentration der Vortizität in dünnen *Wirbelfäden* oder *-flächen* bewirkt. In der vorliegenden Arbeit soll nicht näher auf diese Tatsache eingegangen werden; der interessierte Leser sei z. B. auf die Lehrbücher von Davidson (2004) oder Pope (2000) verwiesen.

1. Grundgleichungen

der Beschreibung turbulenter Strömungen spielen charakteristische Größen eine oft entscheidende Rolle. Im Folgenden sollen nun zwei wohl definierte, separierte Längenskalen vorgestellt werden. Beide lassen sich aus der sowohl numerisch als auch experimentell gut handhabbaren Geschwindigkeitsautokorrelation R_{ij} berechnen.

1.4.1. Geschwindigkeitsautokorrelation

Die Geschwindigkeitsautokorrelation $R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t)$ ist definiert als

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Im Falle homogener, isotroper Turbulenz hängt $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$ nicht vom Aufpunkt \mathbf{x} ab und lässt sich allgemein zerlegen in⁷

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}) &= A(r) \delta_{ij} + B(r) \frac{r_i r_j}{r^2} \\ &= R_{tt}(r) \delta_{ij} + [R_{\ell\ell}(r) - R_{tt}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Hier wurde die Zeitabhängigkeit unter Annahme von Stationarität bereits weggelassen. Zwischen $R_{\ell\ell}$ und R_{tt} gilt die Beziehung⁸

$$R_{tt}(r) = R_{\ell\ell}(r) + \frac{r}{d-1} R'_{\ell\ell}(r) \quad (1.10)$$

$$= \frac{d-2}{d-1} R_{\ell\ell}(r) + \frac{1}{d-1} [r R_{\ell\ell}(r)]', \quad (1.11)$$

wobei d die Dimension des betrachteten Systems bedeutet.

1.4.2. Taylor-Mikroskala

Geoffrey Ingram Taylor (1935) hat die Länge

$$\lambda^2 = \frac{2u_{\text{rms}}^2}{\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u_1 \right)^2 \right\rangle}$$

definiert, die heute als die *Taylor-Mikroskala* bekannt ist. Die Motivation für diese Definitionen ergibt sich aus der Entwicklung von $R_{tt}(r)/u_{\text{rms}}^2$ um $r = 0$,

$$\frac{R_{tt}(r)}{u_{\text{rms}}^2} = 1 + \underbrace{\frac{R'_{tt}(0)}{u_{\text{rms}}^2}}_{=0} r + \underbrace{\frac{R''_{tt}(0)}{2u_{\text{rms}}^2}}_{=-1/\lambda^2} r^2 + \mathcal{O}(r^4)$$

und der Beziehung $R''_{tt}(0) = \langle (\frac{\partial}{\partial x_2} u_1)^2 \rangle$ (siehe auch Abbildung 1.2).

⁷Siehe im Anhang den Abschnitt A.1 über isotrope Tensoren oder z. B. Landau und Lifshitz (1987).

⁸Rechnung im Anhang, Abschnitt B.1, S. 91.

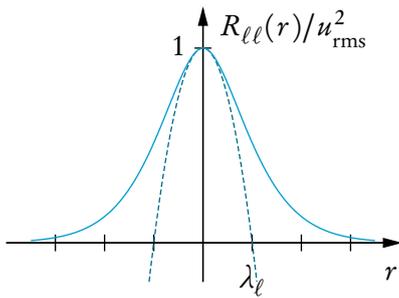


Abbildung 1.2.: Veranschaulichung zum Konzept der Taylor-Länge. Die durchgezogene Linie zeigt die normierte longitudinale Geschwindigkeitsautokorrelation $R_{\ell\ell}(r)/u_{rms}^2$. Die gestrichelte Linie zeigt eine Näherung dieser Funktion im Ursprung durch eine Parabel. Der Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse bestimmt die longitudinale Taylor-Länge λ_ℓ .⁹

Analog lässt sich eine *longitudinale Taylor-Länge* definieren (siehe z. B. Pope 2000)

$$\lambda_\ell^2 = \frac{2u_{rms}^2}{\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 \right)^2 \right\rangle}.$$

Für die Beziehung zwischen λ und λ_ℓ erhält man aus Gl. (1.10)

$$\lambda = \left(\frac{d-1}{d+1} \right)^{1/2} \lambda_\ell,$$

wobei d wieder für die Dimension steht.

Auf den obigen Ausführungen basierend kann man schließlich noch die *Taylor-Skala-Reynolds-Zahl* definieren

$$R_\lambda = \frac{u_{rms}\lambda}{\nu}.$$

1.4.3. Integrale Länge

Die zweite Länge, die man basierend auf der Geschwindigkeitsautokorrelation definiert, ist die *integrale Länge*. Auch sie gibt es in longitudinaler und transversaler Form

$$L_\ell = \int_0^\infty R_{\ell\ell}(r) dr \quad \text{bzw.} \quad L_t = \int_0^\infty R_{tt}(r) dr.$$

Nimmt man für $R_{..}(r)$ einen exponentiellen Verlauf an, so entspricht die integrale Länge gerade der Länge, nach der $R_{..}(r)$ um $1/e$ abgefallen ist.

Mittels Gleichung (1.11) und unter der Annahme, dass $R_{\ell\ell}(r)$ schneller als $1/r^2$ abfällt findet man

$$L_t = \frac{d-2}{d-1} L_\ell.$$

In zwei Dimensionen verschwindet die transversale integrale Längenskala also.

⁹Die Darstellung in Abbildung 1.2 ist aus didaktischen Gründen übertrieben. In realen physikalischen Systemen ist die Taylorlänge λ klein gegen den Abfall der Korrelationsfunktion (d. h. gegen die integrale Länge L). Für die gezeigte Korrelationsfunktion hingegen liegen λ und L etwa in der gleichen Größenordnung.

2. Kaskaden

Die folgenden Abschnitte bieten eine Zusammenstellung wichtiger Ergebnisse zur sog. *turbulenten Kaskade*. Besonderes Augenmerk wird dabei auf Unterschiede zwischen zwei- und dreidimensionaler Turbulenz gerichtet.

2.1. Richardson Kaskade

Big whirls have little whirls that feed on
their velocity,
and little whirls have lesser whirls and
so on to viscosity.

(L. F. Richardson)

Schon in einer berühmten Zeichnung Leonardo da Vincis (Abb. 2.1) erkennt man, wie das großskalige Einströmen von Wasser in ein Becken zu wirbelartigen Strukturen auf vielen verschiedenen Längenskalen führt. Scheinbar zerfällt der große Wirbel in kleinere Wirbel und diese in noch kleinere Wirbel und so weiter. Diese Idee steht auch hinter dem 1922 von Lewis Fry Richardson vorgeschlagenen Kaskadenmodell (Richardson 1922). Demnach wird einer turbulenten Strömung auf großen Skalen Energie zugeführt und erzeugt dadurch Wirbel. Diese Wirbel werden instabil¹ und geben ihre Energie an kleinere Wirbel ab, die ihrerseits instabil werden und so weiter (siehe Abb. 2.2). Diese *Energiekaskade* kommt erst zum Stillstand, wenn Wirbel einer Größenordnung erzeugt werden, auf der die viskose Dissipation einsetzt und die kinetische Energie in Wärme umwandelt.

¹Der Mechanismus hinter dem Instabilwerden von Wirbelstrukturen liegt im Wirken des Wirbelstreckungsterms begründet. In der vorliegenden Arbeit wird nicht näher darauf eingegangen; der interessierte Leser sei auf die gängigen Lehrbücher wie die von Pope (2000) oder Davidson (2004) verwiesen.



Abbildung 2.1.: Wasser strömt in ein Becken, Ausschnitt aus einer Zeichnung von Leonardo da Vinci (1508–1509). Da Vinci arbeitet deutlich das Zusammenspiel wirbelartiger (kohärenter) Strukturen auf verschiedenen Längenskalen heraus und deutet damit spätere Ergebnisse der physikalischen Beschreibung turbulenter Strömungen, wie die Energiekaskade, an.

2. Kaskaden

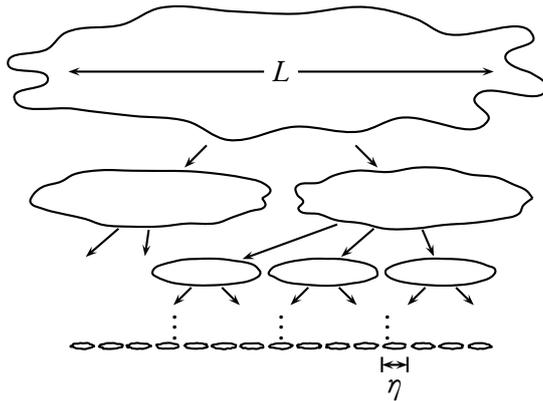


Abbildung 2.2.: Typische Illustration der Richardson-Kaskade. Auf der integralen Längenskala L wird dem System Energie zugeführt. Die dadurch entstandenen Wirbelstrukturen zerfallen in immer kleinere Strukturen, bis auf der Dissipationslänge η die Energie dissipiert wird.

Im Folgenden wird ersichtlich werden, dass dieses einfache Modell der Energiekaskade sich in theoretischen Beschreibungen dreidimensionaler, und in modifizierter Form auch zweidimensionaler, turbulenter Strömungen wiederfindet.

2.2. Nichtviskose Erhaltungsgrößen

Die Kenntnis von Erhaltungsgrößen, wie z. B. des Runge-Lenz-Vektors beim Kepler-Problem, trägt häufig zur Lösung physikalischer Probleme bei. Daher macht es Sinn auch bei turbulenten Strömungen nach Erhaltungsgrößen zu fragen. Da es sich hierbei um ein dissipatives System handelt, ist es üblich, auch solche Größen zu betrachten, die nur im dissipationfreien Falle ($\nu = 0$) und ohne Einfluss äußerer Kräfte ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$) erhalten sind. Anders formuliert bedeutet das, diese Größen werden vom nichtlinearen Term erhalten. Im Folgenden werden zwei solche *nichtviskosen Erhaltungsgrößen* vorgestellt.²

2.2.1. Mittlere kinetische Energie

Im Falle homogener Turbulenz gilt für die zeitliche Entwicklung der mittleren kinetischen Energie pro Masseneinheit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle = \nu \langle u_i(\mathbf{x}, t) \Delta u_i(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle u_i(\mathbf{x}, t) f_i(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (2.1)$$

Gleichung (2.1) folgt aus den Navier-Stokes-Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponente $u_i(\mathbf{x}, t)$ durch Multiplikation mit $u_i(\mathbf{x}, t)$. Sie besagt, dass kinetische Energie in turbulenten Strömungen nur durch äußere Kräfte erzeugt bzw. nur durch Dissipation vernichtet wird. Setzt man nun die Viskosität ν und die äußeren Kräfte $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ gleich null, so wird die mittlere kinetische Energie zur Erhaltungsgröße.

²Neben den vorgestellten gibt es weitere nichtviskose Erhaltungsgrößen, wie die Parität, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

2.2.2. Enstrophie (in zwei Dimensionen)

Für zweidimensionale Strömungen findet man eine weitere nichtviskose Erhaltungsgröße, die sogenannte *Enstrophie*, definiert als

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \langle \omega^2(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Durch Multiplikation der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichung (1.7) mit $\omega(\mathbf{x}, t)$, ergibt sich für die Enstrophie

$$\frac{d}{dt} \Omega(t) = \nu \langle \omega(\mathbf{x}, t) \Delta \omega(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle \omega(\mathbf{x}, t) \tilde{f}(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Setzt man wieder die Viskosität ν und die äußeren Kräfte $\tilde{f}(\mathbf{x}, t)$ gleich null, so verschwindet auch die zeitliche Ableitung – die Enstrophie wird zur Erhaltungsgröße.

2.3. Energiespektrum

Im Bild der Richardson Kaskade, nach der Energie von Skala zu Skala transportiert wird, ist der Energiegehalt einer Fourier-Mode eine interessante Größe. Sie wird durch das *Energiespektrum* $E(k, t)$ beschrieben. Das Energiespektrum ergibt sich aus der mittleren kinetischen Energie pro Masseneinheit, $\mathcal{E}(t)$, durch Fourier-Transformation³

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{2} \int \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) d^{(d)}k = \int_0^\infty E(k, t) dk, \quad (2.2)$$

wobei $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$ die Fourier-Transformierte des Geschwindigkeitsautokorrelationstensors $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$, definiert in Abschnitt 1.4.1, ist und d für die Dimension des betrachteten Systems steht. Das zweite Gleichheitszeichen in Gleichung (2.2) folgt, weil Faltungen im Ortsraum, im Fourier-Raum zu einfachen Produkten werden und umgekehrt. Das dritte Gleichheitszeichen gilt im Falle isotroper Turbulenz und folgt ähnlichen Argumenten wie die Zerlegung des Geschwindigkeitsautokorrelationstensors in Abschnitt 1.4.1. Die exakte Herleitung findet sich z. B. bei Batchelor (1953, Kap. II u. III) oder Pope (2000, Kap. 6).

Für das Energiespektrum lässt sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen im Fourier-Raum (Rose und Sulem 1978; Lesieur 1997), oder alternativ durch Fourier-Transformation der bekannten von Kármán-Howarth-Relation (von Kármán und Howarth 1938), folgende Bilanzgleichung herleiten

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k, t) = T(k, t) + F(k, t), \quad (2.3)$$

³Hier ist die Fourier-Transformation wie folgt definiert:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^{(d)}k \quad \text{und} \quad \hat{f}(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^{(d)}x,$$

wobei d wieder die Bedeutung der Dimension hat.

2. Kaskaden

wobei $F(k, t)$ die Energieinjektion durch die äußeren Kräfte beschreibt. Der Term $T(k, t)$ ergibt sich aus dem nichtlinearen und dem Druckterm der Navier-Stokes-Gleichungen und beschreibt den Energietransfer zwischen Fourier-Moden. Aus Gleichung (2.1) folgt im Falle nichtviskoser nichtgetriebener Turbulenz (d. h. $\nu = 0$ und $F(k, t) = 0$)

$$\int_0^{\infty} T(k, t) dk = 0. \quad (2.4)$$

Man kann allerdings durch direktes Auswerten des Integrals zeigen, dass Gleichung (2.4) auch für getriebene Turbulenz gültig ist.

2.4. Energiefluß in drei Dimensionen

Nach der Vorstellung der Richardson-Kaskade fließt Energie von großen zu kleinen Skalen, d. h. von kleinen zu großen Wellenzahlen. Im Falle dreidimensionaler Turbulenz reichen die bisherigen Ergebnisse aus, um dieses Bild zu bestätigen. Dazu definiert man zunächst den Energiefluß durch die Fourier-Mode k

$$\Pi(k, t) = \int_k^{\infty} T(k', t) dk', \quad \text{bzw. mit (2.4)} \quad \Pi(k, t) = - \int_0^k T(k', t) dk'. \quad (2.5)$$

Ist der Energiefluß positiv, $\Pi(k, t) > 0$, bedeutet das, dass Energie im Mittel in Richtung großer Wellenzahlen k transportiert wird.

Um $\Pi(k, t)$ zu berechnen, nutzt man Gleichung (2.3) im stationären Fall,

$$2\nu k^2 E(k) = T(k, t) + F(k, t), \quad (2.6)$$

und nimmt an, dass die äußeren Kräfte in einem schmalen Bereich um die Wellenzahl k_i mit der Rate ε Energie injizieren, d. h.

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} F(k, t) dk$$

(siehe auch Abbildung 2.3). Da ε der einzige Energieeintrag ist und man den stationären Zustand betrachtet, ist ε also auch die mittlere Energiedissipationsrate. Zunächst stellt man Gleichung (2.6) um und integriert von 0 bis k

$$- \int_0^k T(k') dk' = -2\nu \int_0^k k'^2 E(k') dk' + \int_0^k F(k') dk'. \quad (2.7)$$

Die linke Seite ist per Definition (2.5) der Energiefluss $\Pi(k)$. Das Integral über die äußeren Kräfte legt die Betrachtung zweier Bereiche nahe (vgl. wieder Abb. 2.3). Im Bereich $k < k_i$ verschwindet dieses Integral und für den Grenzfall $Re \rightarrow \infty$, d. h. $\nu \rightarrow 0$, gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Pi(k) = -2 \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^{k < k_i} k'^2 E(k') dk' = 0.$$

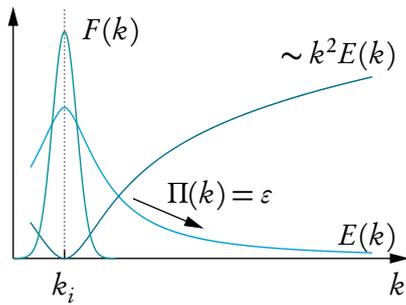


Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung des Energieflusses im stationären Zustand. Der schmalbandige Antrieb $F(k)$ injiziert mit konstanter Rate ε Energie, die dann in Richtung großer Wellenzahlen fließt (vgl. Lesieur 1997).

Im zweiten Bereich, $k > k_i$, gilt

$$\int_0^{k > k_i} F(k') dk' = \varepsilon$$

und damit für endliches $k_i < k \ll \infty$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Pi(k) = -2 \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^k k'^2 E(k') dk' + \varepsilon = \varepsilon.$$

Lässt man allerdings k gegen Unendlich gehen, muss wegen (2.4) das Integral über $k^2 E(k)$ divergieren, damit Gleichung (2.7),

$$2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk = \int_0^\infty F(k') dk' = \varepsilon,$$

auch im Falle $\nu \rightarrow 0$ gültig bleibt.

Insgesamt ergibt sich für die beiden Bereiche und den Fall $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Pi(k) = \begin{cases} 0, & k < k_i, \\ \varepsilon, & k_i < k \ll \infty \\ 0, & k \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Die kinetische Energie fließt also von der Längenskala, auf der sie durch äußere Kräfte eingetragen wird, in Richtung kleiner Skalen, bis sie auf kleinsten Skalen dissipiert wird.

2.5. Kolmogorov-Spektrum (K41)

Im Jahr 1941 veröffentlichte Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov drei sehr einflussreiche Artikel zur Turbulenz. Die darin beschriebenen Ideen sind heute als *K41-Theorie* bekannt und werden u. a. von Frisch (1996) umfangreich zusammengefasst. Hier wird zunächst nur ein Ergebnis aus dem ersten der drei Artikel (Kolmogorov 1941a) vorgestellt, in Abschnitt 2.7 werden dann weitere Aspekte Kolmogorovs Theorie besprochen. In dem zuletzt zitierten Artikel formuliert Kolmogorov seine

2. Kaskaden

Zweite Ähnlichkeitshypothese: Im Grenzfall unendlicher Reynolds-Zahlen, hängen die statistischen Eigenschaften kleinskaliger Größen ausschließlich von der Skala ℓ und der mittleren Energiedissipationsrate ε ab.⁴

Daraus lässt sich für das Energiespektrum folgern ($\ell = k^{-1}$)

$$E(k) = \sum_{\alpha, \beta} c(\alpha, \beta) \varepsilon^\alpha k^\beta$$

und mittels Dimensionsanalyse mit der Längeneinheit $[L]$ und der Zeiteinheit $[T]$,

$$E(k) = [L]^3 [T]^{-2}, \quad k = [L]^{-1}, \quad \varepsilon = [L]^2 [T]^{-3}, \quad (2.8)$$

erhält man ein eindeutig lösbares Gleichungssystem, so dass

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}.$$

Dies ist das berühmte $k^{-5/3}$ -Gesetz. Es wurde mehrfach unabhängig und auf verschiedenem Wege entdeckt, unter anderen von Obukhov (1941a, b) und gemeinschaftlich durch von Weizsäcker (1948) und Heisenberg (1948).

2.6. Energiefluss in zwei Dimensionen

In Abschnitt 2.2.2 wurde die Enstrophie $\Omega(t)$ vorgestellt, die in zweidimensionalen Strömungen, zusätzlich zur mittleren kinetischen Energie, erhalten ist. Das Auftreten dieser zweiten nichtviskosen Erhaltungsgröße hat Konsequenzen für den Energiefluß der Kaskade in zwei Dimensionen. Einen ersten Hinweis darauf liefert ein Theorem von Fjørtoft (1953).

Zunächst stellt man fest, dass sich das *Enstrophiespektrum* direkt aus dem Energiespektrum $E(k, t)$ ergibt

$$\Omega(t) = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk.$$

Diese Beziehung folgt aus der Tatsache, dass Ableitungen im Ortsraum, im Fourier-Raum zu Multiplikationen mit dem Wellenzahlvektor \mathbf{k} werden (detaillierte Herleitung in Lesieur 1997, Kap. V-10).

Folgt man wieder der Argumentation Kolmogorovs (siehe Abschnitt 2.5), die auch in zwei Dimensionen gültig sein sollte, findet man neben dem bekannten $k^{-5/3}$ -Spektrum auch die Möglichkeit für ein k^{-3} -Energiespektrum. Dazu nimmt man an, dass das Enstrophiespektrum $k^2 E(k)$ nur von k und $\eta \sim k^2 \varepsilon$ abhängt⁵ und führt eine zu (2.8) analoge Dimensionsanalyse durch.

⁴Sehr freie Übersetzung.

⁵Man beachte, dass η häufig die sog. Kolmogorovsche Dissipationslänge ($= (v^3/\varepsilon)^{1/4}$) bezeichnet (siehe z. B. Pope 2000). Die hier benutzte Notation, nach der η die konstante Enstrophie-Transferrate bezeichnet, wurde von Kraichnan (1967) übernommen.

2.6.1. Fjørtofts Theorem

Fjørtoft (1953) betrachtet nun den Spezialfall, dass nur drei Moden, k_1 , k_2 und k_3 angeregt sind. Viskosität und äußere Kräfte werden weggelassen, d. h. man betrachtet die zweidimensionale Euler-Gleichung. Wenn nun $E(k_i, t)$ die kinetische Energie und $\Delta E(k_i)$ die Änderung der Energie zwischen zwei Zeitpunkten in der Mode k_i bezeichnen, lassen sich Energie- und Enstrophieerhaltung wie folgt formulieren

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta E(k_1) + \Delta E(k_2) + \Delta E(k_3), \\ 0 &= k_1^2 \Delta E(k_1) + k_2^2 \Delta E(k_2) + k_3^2 \Delta E(k_3). \end{aligned}$$

Nimmt man zur weiteren Vereinfachung an $k_2 = 2k_1$ und $k_3 = 2k_2$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta E(k_1) &= -\frac{4}{5} \Delta E(k_2), & \Delta E(k_3) &= -\frac{1}{5} \Delta E(k_2); \\ k_1^2 \Delta E(k_1) &= -\frac{1}{5} k_2^2 \Delta E(k_2), & k_3^2 \Delta E(k_3) &= -\frac{4}{5} k_2^2 \Delta E(k_2). \end{aligned}$$

Betrachtet man nun nur den Energiefluss aus der Wellenzahl k_2 (d. h. $\Delta E(k_2) < 0$), liest man an obigen Gleichungen ab: Energie fließt stärker in Richtung kleinerer Wellenzahlen, während Enstrophie stärker in Richtung großer Wellenzahlen fließt. Dieses Ergebnis ist gerade konträr zu dem aus drei Dimensionen, wo Energie in Richtung großer Wellenzahlen strömt.

2.6.2. Die inverse Energiekaskade nach Kraichnan

Robert H. Kraichnan (1967) hat in einem sehr einflussreichen Artikel zeigen können, dass das k^{-3} -Spektrum zu einer *reinen* Enstrophiekaskade gehört und den gleichzeitigen Fluss von Energie ausschließt; bzw. vice versa für das $k^{-5/3}$ -Spektrum. Weitere Überlegungen führten ihn dann zu dem Schluss, dass, nimmt man wieder einen Energieeintrag durch äußere Kräfte in einem Bereich um die Wellenzahl k_i an, in einem stationären Zustand die Enstrophie in Richtung großer Wellenzahlen strömt und dabei ein Spektrum $E(k) \sim k^{-3}$ ausgebildet wird. Umgekehrt fließt nach Kraichnan die Energie in Richtung kleiner Wellenzahlen, wo sich das $k^{-5/3}$ -Spektrum ausbildet (siehe Abbildung 2.4). Die Herleitung dieser Ergebnisse wird im Anhang (Abschnitt B.2) in groben Zügen vorgestellt.

2.7. Charakterisierung der Kaskade durch Geschwindigkeitsinkremente

Kolmogorov (1941a) stellt fest, dass die Vorstellung einer turbulenten Strömung als einen isotropen Zustand, wie Taylor (1935) sie vorschlägt, zwar in Spezialfällen gut realisiert ist, im Allgemeinen aber versagt. Auf der Skala, auf der der Energieeintrag stattfindet, wird die Isotropie üblicherweise gebrochen sein. Daher definiert Kolmogorov die *lokale* Isotropie. Dazu müssen zunächst die sog. *Geschwindigkeitsinkremente* $v(x, r, t)$ eingeführt werden,

$$v(x, r, t) = u(x + r, t) - u(x, t). \quad (2.9)$$

2. Kaskaden

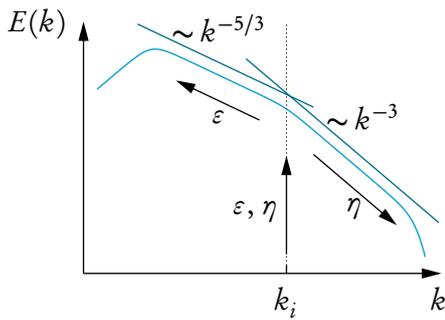


Abbildung 2.4.: Doppeltlogarithmische Darstellung des Energiespektrums in zwei Dimensionen. Äußere Kräfte injizieren mit der Rate ε Energie und mit der Rate η Enstrophie in einem schmalen Bereich um die Wellenlänge k_i . Die Energie strömt in Richtung kleiner Wellenzahlen, wobei ein $k^{-5/3}$ -Spektrum ausgebildet wird, während die Enstrophie durch ein k^{-3} -Spektrum in Richtung großer Wellenzahlen strömt.

Darauf basierend definiert Kolmogorov:

Definition (lokale Homogenität) Ist die N -Punktverbundwahrscheinlichkeit

$$p(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2, t), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_N, t))$$

in einem Gebiet \mathcal{G} für jeden beliebigen Satz von $\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N$, unabhängig von \mathbf{x} und $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, so heißt die Strömung *lokal homogen*.

Definition (lokale Isotropie) Ist die N -Punktverbundwahrscheinlichkeit zusätzlich invariant unter Drehungen und Spiegelungen der Koordinatenachsen, so heißt die Strömung *lokal isotrop*.

Als eine Art Analogon zur in Abschnitt 1.4.1 eingeführten Geschwindigkeitsautokorrelation im lokal isotropen Fall führt Kolmogorov die longitudinalen und transversalen *Strukturfunktionen* n -ter Ordnung $S_{\ell/t}^n(r, t)$ ein,

$$S_{\ell/t}^n(v_{\ell/t}, r, t) = \langle [v_{\ell/t}(r)]^n \rangle,$$

mit

$$v_{\ell}(r, t) = [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{bzw.} \quad v_t(r, t) = [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n}_r, \quad (2.10)$$

wobei \mathbf{n}_r ein senkrecht auf \mathbf{r} stehender Einheitsvektor ist.

Ausgehend von der von Kàrmàn-Howarth-Relation kann Kolmogorov (1941b) in seinem dritten Artikel von 1941 zeigen, dass für die dritte longitudinale Strukturfunktion im Falle stationärer lokal isotroper Turbulenz gilt

$$S_{\ell}^3(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad (\text{in drei Dimensionen}), \quad (2.11)$$

wo ε wieder die mittlere Energiedissipationsrate bezeichnet. Diese Relation ist als das *Vier-Fünftel-Gesetz* bekannt geworden und ist eine der wenigen exakten Relationen, die man direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen herleiten kann.

2.7. Charakterisierung der Kaskade durch Geschwindigkeitsinkremente

Die dritte longitudinale Strukturfunktion steht in direktem Zusammenhang mit dem Energiefluß $\Pi(k)$, es ist daher nicht verwunderlich, dass sich bei Gleichung (2.11) in zwei Dimensionen das Vorzeichen ändert, außerdem ändert sich der Proportionalitätsfaktor

$$S_\ell^3(r) = \frac{3}{2} \varepsilon r \quad (\text{in zwei Dimensionen}). \quad (2.12)$$

Diese Gleichung gilt in der inversen Energiekaskade; für die direkte Enstrophiekaskade lässt sich auch eine Relation herleiten. Beide Herleitungen führt Bernard (1999) explizit durch.

Die dritten Strukturfunktionen geben die Schiefe der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Inkremente $p(v(r))$ an. Eine Konsequenz der Gültigkeit von Relation (2.11) und (2.12) ist nun, dass die Inkrementverteilungen schief sein müssen, und es sich schon allein deshalb nicht um Gauß-Verteilungen handeln kann.

3. Deutung der Kaskade als Markow-Prozess

Eine neue Sichtweise der turbulenten Kaskade lieferten Friedrich und Peinke (1997a, b). Sie interpretieren die Kaskade als einen stochastischen Prozess der Geschwindigkeitsinkremente¹ v in der Skala r . Unter diesem Gesichtspunkt kann man fragen: Wieviel Information ist nötig, um die Kaskade statistisch vollständig zu beschreiben? Im allgemeinsten Fall benötigt man dazu die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(v_1, r_1; v_2, r_2; \dots v_N, r_N)$ der Inkremente $v_1 = v(r_1), v_2 = v(r_2), \dots v_N = v(r_N)$ auf den Skalen $r_1, r_2, \dots r_N$. Friedrich und Peinke konnten aber anhand von Messungen in einem Freistrahlexperiment zeigen, dass diese Wahrscheinlichkeitsdichte der Markow-Bedingung genügt, sofern die Abstände zwischen den auftretenden Skalen r_i größer einer bestimmten Länge, der Markow-Einstein-Länge, sind. Diese Tatsache stellt, wie im Folgenden besprochen wird, eine große Vereinfachung dar.

3.1. Die Markow-Eigenschaft

Man betrachtet den stochastischen Prozess, der die Entwicklung der Zufallsgröße v in der Variablen r beschreibt.^{2,3} Dieser wird im Allgemeinen vollständig durch eine Verbundwahrscheinlichkeitsdichte (engl. *joint probability density function*, jpdf),

$$p(v_1, r_1; v_2, r_2; \dots v_N, r_N),$$

charakterisiert. Zusätzlich kann man die zugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten (engl. *conditional probability density function*, cpdf) definieren

$$p(v_1, r_1; v_2, r_2; \dots v_i, r_i | v_{i+1}, r_{i+1}; \dots v_N, r_N) = \frac{p(v_1, r_1; v_2, r_2; \dots v_N, r_N)}{p(v_{i+1}, r_{i+1}; v_{i+2}, r_{i+2}; \dots v_N, r_N)}.$$

Diese geben die Wahrscheinlichkeit an, dass $v(r_1) = v_1, \dots v(r_i) = v_i$, gegeben (d. h. man weiß, dass) $v(r_{i+1}) = v_{i+1}, \dots v(r_N) = v_N$.

Wenn für die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte gilt

$$p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3; \dots v_N, r_N) = p(v_1, r_1 | v_2, r_2), \quad (3.1)$$

¹Geschwindigkeitsinkremente wurden in Abschnitt 2.7 eingeführt und in Gleichung (2.9) definiert. Hier und im Folgenden sind stets longitudinale Inkremente (siehe Gl. (2.10)) gemeint. Die Betrachtung transversaler Inkremente, bzw. insbesondere der Kombination aus longitudinalen und transversalen Inkrementen, liefert allerdings, wie Siefert und Peinke (2004, 2006) zeigen, auch interessante Ergebnisse.

²Üblicherweise betrachtet man stochastische Prozesse in der Zeit, d. h. die Entwicklung einer Zufallsgröße in der Variablen t . Alle gängigen Ergebnisse, wie man sie z. B. in Gardiner (2004) oder Risken (1996) findet, lassen sich aber, wie hier geschehen, auf Prozesse in der Skala r übertragen.

³Für einen Überblick über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung siehe Abschnitt A.2 im Anhang.

3. Deutung der Kaskade als Markow-Prozess

nennt man diesen Prozess nach Andrei Andrejewitsch Markow einen *Markow-Prozess*. Das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße $v(r)$ auf der Skala r_1 den Wert v_1 annimmt, hängt ausschließlich davon ab, welchen Wert sie auf der Skala r_2 hat. Gleichung (3.1) nennt man auch *Markow-Bedingung*.

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte eines Markow-Prozesses lässt sich als Produkt aus bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten und einer einfachen Wahrscheinlichkeitsdichte schreiben

$$p(v_1, r_1; v_2, r_2; \dots v_N, r_N) = p(v_1, r_1 | v_2, r_2) p(v_2, r_2 | v_3, r_3) \dots \dots p(v_{N-1}, r_{N-1} | v_N, r_N) p(v_N, r_N).$$

In gewisser Hinsicht ist die Markow-Eigenschaft also der nächst einfachere Fall nach dem der statistischen Unabhängigkeit.

Einstein (1905) konnte, unter anderem durch die implizit formulierte Annahme der Markow-Eigenschaft der Teilchenbewegung, das Rätsel der Brownschen Molekularbewegung lösen (siehe Gardiner 2004, Kap. 1.2.1). Allerdings weist Einstein schon in dieser Arbeit darauf hin, dass die Markow-Bedingung typischerweise nur auf Längenskalen größer einer bestimmten Länge,

$$|r_i - r_{i+1}| \geq l_{\text{ME}}$$

gilt.⁴ Diese Länge, l_{ME} , wird heute häufig als *Markow-Einstein-Länge* bezeichnet (siehe z. B. Lück et al. 2006).

3.2. Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten allgemeiner stochastischer Prozesse gehorchen der Relation

$$\begin{aligned} p(v_1, r_1 | v_3, r_3) &= \int p(v_1, r_1; v_2, r_2 | v_3, r_3) dv_2 \\ &= \int p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3) p(v_2, r_2 | v_3, r_3) dv_2. \end{aligned}$$

Für Markow-Prozesse vereinfacht sich diese Relation zur *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

$$p(v_1, r_1 | v_3, r_3) = \int p(v_1, r_1 | v_2, r_2) p(v_2, r_2 | v_3, r_3) dv_2. \quad (3.2)$$

Zur Überprüfung der Gültigkeit der Markow-Bedingung (3.1) anhand von experimentellen Daten bedient man sich häufig der Chapman-Kolmogorov-Gleichung. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der Tatsache begründet, dass in Gl. (3.2) nur einfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten eingehen, für deren Schätzung weniger Daten notwendig sind. Der Nachteil dieser Methode ist, dass die Gültigkeit der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

⁴Einstein betrachtete einen Prozess in der Zeit, daher spricht er von einem Zeitintervall τ (siehe Einstein 1905, S. 556).

nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Markow-Bedingung darstellt. Konkret bedeutet dies, dass es, wie Lévy (1949) und Feller (1959) gezeigt haben, stochastische Prozesse gibt, die Gl. (3.2) erfüllen, jedoch keine Markow-Prozesse sind. Andererseits sei darauf hingewiesen, dass die zitierten Prozesse für diesen Zweck konstruiert wurden und sicher nicht den generischen Fall darstellen.

3.3. Kramers-Moyal-Entwicklung und Fokker-Planck-Gleichung

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Differentialgleichung herzuleiten, die die Entwicklung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v, r|v', r')$ in der Skala r beschreibt. Die Überlegungen werden auf die *Fokker-Planck-Gleichung* führen, die Adriaan Daniël Fokker (1914) und Max Planck (1917), allerdings auf anderem Wege als hier dargestellt, entdeckt haben. Kolmogorov (1931) hat diese Gleichung später mathematisch formalisiert, weshalb sie bei den Mathematikern auch Kolmogorov-Gleichung heißt (siehe Gardiner 2004). Außerdem existiert der Name Smoluchowski-Gleichung nach Marian von Smoluchowski (1906), der fast zeitgleich mit Einstein die Brownsche Molekularbewegung beschreiben konnte und später (von Smoluchowski 1916) eine Version der hier behandelten Gleichung benutzte (siehe Risken 1996).

Bisher wurde keinerlei Aussage über die *Richtung* des stochastischen Prozesses getroffen, d. h. es steht noch nicht fest, ob sich die Inkremente $v(r)$ in Richtung kleiner oder in Richtung großer Skalen *bewegen*. Im Grunde spielt die Richtung auch keine Rolle – sie stellt hier lediglich eine Konvention dar. Bei der Untersuchung der Energiekaskade in drei Dimensionen ist man übereingekommen, sich an der Richtung des Energieflusses zu orientieren und betrachtet daher den stochastischen Prozess in Richtung kleiner Skalen (siehe Friedrich und Peinke 1997b; Renner et al. 2001; Renner 2002). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich allerdings mit der inversen Energiekaskade, in der Energie in Richtung großer Skalen fließt. Daher wird auch der stochastische Prozess der Geschwindigkeitsinkremente $v(r)$, analog zu Prozessen in der Zeit, in Richtung wachsender Skalen r betrachtet. Die Ergebnisse für den dreidimensionalen Fall erhält man, indem man r durch $-r$ substituiert.

3.3.1. Kramers-Moyal-Entwicklung

Kramers (1940) und später Moyal (1949) konnten folgende Entwicklung für die pdf $p(v, r)$ eines Markow-Prozesses herleiten

$$\frac{\partial}{\partial r} p(v, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial v} \right)^n D^{(n)}(v, r) p(v, r) \quad (3.3)$$

mit den *Kramers-Moyal-Koeffizienten*

$$D^{(n)}(v, r) = \frac{1}{n!} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \underbrace{\int (v' - v)^n p(v', r + \Delta r | v, r) dv'}_{=M^{(n)}(v, r, \Delta r)} \quad (3.4)$$

3. Deutung der Kaskade als Markow-Prozess

Bei $M^{(n)}(v, r, \Delta r)$ handelt es sich um bedingte Momente. Man kann sie auch folgendermaßen formulieren

$$M^{(n)}(v, r, \Delta r) = \langle [v(r + \Delta r) - v(r)]^n | v, r \rangle.$$

Verschiedene Herleitungen dieser Entwicklung finden sich auch bei Risiken (1996) und Gardiner (2004).

Die Kramers-Moyal-Entwicklung (3.3) gilt ebenso für die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $p(v, r | v', r')$. Dies sieht man direkt, wenn man als Anfangsbedingung die Delta-Distribution $p(v, r') = \delta(v - v')$ wählt.

An dieser Stelle lässt sich schon ein für die Turbulenzforschung sehr interessantes Zwischenergebnis ableiten. Multipliziert man nämlich Gleichung (3.3) mit v^k und integriert über v , so erhält man für die longitudinale Strukturfunktion k -ter Ordnung (siehe Renner et al. 2001, S. 392)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} S_\ell^k(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} v^k \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^n D^{(n)}(v, r) p(v, r) dv \\ &= \sum_{n=1}^{n=k} \frac{k!}{(k-n)!} \int_{-\infty}^{\infty} v^{k-n} D^{(n)}(v, r) p(v, r) dv. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Strukturfunktion k -ter Ordnung hängt also ausschließlich von den ersten k Kramers-Moyal-Koeffizienten ab.

3.3.2. Pawulas Lemma

Pawula (1967) konnte zeigen: Falls für ein beliebiges gerades n der zugehörige Kramers-Moyal-Koeffizient verschwindet, d. h. $D^{(n)}(v, r) = 0$, dann verschwinden alle Kramers-Moyal-Koeffizienten mit $n \geq 3$. Anders formuliert bedeutet das, ist etwa $D^{(4)}(v, r) \neq 0$, so bricht die Entwicklung (3.3) nie ab.

3.3.3. Fokker-Planck-Gleichung

Kann man nun zeigen, dass z. B. $D^{(4)}(v, r) = 0$, so bricht die Kramers-Moyal-Entwicklung (3.3) nach dem zweiten Glied ab und wird zur *Fokker-Planck-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial r} p(v, r | v', r') = \left[-\frac{\partial}{\partial v} D^{(1)}(v, r) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} D^{(2)}(v, r) \right] p(v, r | v', r').$$

Der Koeffizient $D^{(1)}(v, r)$ heißt *Drifterm*, $D^{(2)}(v, r)$ wird *Diffusionskoeffizient* genannt.

3.4. Überblick

Dieses Kapitel lässt sich auf zwei grundlegende Aussagen zusammenfassen:

1. Für Markow-Prozesse genügt die Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $p(v_i, r_i | v_{i+1}, r_{i+1})$, um den ganzen Prozess, d. h. die volle N -Punktwahrscheinlichkeitsdichte, zu beschreiben.

2. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(v_i, r_i | v_{i+1}, r_{i+1})$ gehorchen, sofern z. B. der Kramers-Moyal-Koeffizient vierter Ordnung $D^{(4)}(v, r)$ verschwindet, einer partiellen Differentialgleichung, der Fokker-Planck-Gleichung. Die unbekanntenen Koeffizienten sind dabei vollständig aus Messungen zu bestimmen.

Zusammengenommen erlauben diese beiden Erkenntnisse die vollständige Beschreibung eines physikalischen Prozesses. Besonders elegant ist, dass dieser Zugang keinerlei Annahmen über das beschriebene System macht – er basiert ausschließlich auf messbaren Größen.

Neben den grundlegenden Arbeiten von Friedrich und Peinke (1997a, b) und den detaillierteren Ausführungen von Renner et al. (2001), die sich mit Geschwindigkeitsinkrementen in der turbulenten Energiekaskade beschäftigen, konnte die hier beschriebene Methode auch erfolgreich auf weitere Aspekte turbulenter Strömungen angewendet werden. So haben z. B. Lück et al. (1999) Hinweise geliefert, dass der Übergang zur vollentwickelten Turbulenz in der Nachlaufströmung hinter einem Zylinder mit einer qualitativen Änderung des Driftkoeffizienten $D^{(1)}(v, r)$ einhergeht. Naert et al. (1997) konnten für die räumlich gemittelte Energiedissipationsrate in turbulenten Strömungen die Markow-Eigenschaft nachweisen und interessante Bezüge zwischen den Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung und bestehenden Theorien herleiten. Strumik und Macek (2008) haben diese Methode erfolgreich auf Messungen im Sonnenwind, der turbulenten Strömungen recht ähnlich ist, angewendet. Tutkun und Mydlarski (2004) haben die Ergebnisse von Renner et al. (2001) bestätigt. Bei der Untersuchung eines passiven Skalars stellten sie allerdings fest, dass der Prozess zwar der Markow-Bedingung gehorcht, die Kramers-Moyal-Entwicklung jedoch nicht mehr abbricht. Tutkun und Mydlarski bringen diese Tatsache mit der stärkeren Intermittenz in Feldern passiver Skalare in Verbindung.

In dieser Arbeit wurde das Hauptaugenmerk auf die Anwendung der hier beschriebenen Datenanalyse auf turbulente Strömungen gelegt. Ihr bereits erwähnter Vorteil aber, nämlich die Unabhängigkeit von Annahmen über das untersuchte System, eröffnet dieser Vorgehensweise ein wesentlich breiteres Anwendungsspektrum. Dabei spielen sicherlich, wie bereits eingangs angedeutet, zeitabhängige Prozesse die größere Rolle, aber auch skalenabhängige Prozesse werden häufig angetroffen. Einen umfangreichen Überblick, und auch eine detailreichere Einführung als hier, bieten dazu Friedrich et al. (2009).

4. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

Im letzten Kapitel wurde eine phänomenologische Methode vorgestellt, die es erlaubt, die volle N -Punktverbundwahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeitsinkremente in einer turbulenten Strömung zu beschreiben. Beim dort beschriebenen Vorgehen wird die Entwicklung der Geschwindigkeitsinkremente als stochastischer Prozess in der Skala verstanden, der vollständig aus Messdaten bestimmbar ist – diese Methode steht somit in nur losem Zusammenhang mit den Navier-Stokes-Gleichungen. In diesem Kapitel soll nun ein anderer Weg eingeschlagen werden. Es wird ein Konzept vorgestellt, das es erlaubt, die Entwicklung von pdfs direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen zu bestimmen. Allerdings wird sich zeigen, dass die zugehörigen Gleichungen nicht geschlossen sind und somit einen phänomenologischen Schließungsansatz erfordern. Einen weiteren Unterschied zum vorangegangenen Kapitel stellt die Wahl der untersuchten Variable dar. In Abschnitt 1.2 wurde die Vortizität als eine der Geschwindigkeit gleichwertige Variable zur Beschreibung der Flüssigkeitsdynamik eingeführt. Sie stellt dabei, bedingt durch ihre Definition als Rotation der Geschwindigkeit, eine kleinskaligere Größe dar (siehe auch Abbildung 5.1 in Kapitel 5). Für die folgenden Abschnitte soll nun die Vortizität zum Gegenstand der Untersuchung erhoben werden.

Schon in Abschnitt 2.5 kam die Sprache auf die gleichzeitige unabhängige Entdeckung des $k^{-5/3}$ -Gesetzes. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie, der dieses Kapitel gewidmet ist, stellt einen weiteren solchen Fall der zeitgleichen Entdeckung dar. Lundgren (1967, eingereicht am 9. Juni 1966), Monin (1967, eingereicht am 17. August 1967) und Novikov (1967, Datum der Einreichung unbekannt) konnten auf verschiedenem Wege direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen eine nicht geschlossene Hierarchie von Differentialgleichungen für die N -Punktverbundwahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeit, bzw. im Falle von Novikov der Vortizität, herleiten. Dabei koppeln jeweils die N -Punktverbundwahrscheinlichkeitsdichten an die $(N + 1)$ -Punktverbundwahrscheinlichkeitsdichten. Heutzutage sind ähnliche Zugänge als *pdf-Methoden* bekannt und werden z. B. im Lehrbuch von Pope (2000, Kap. 12 u. Appendix H) behandelt.

4.1. Einführende Überlegungen

Im Folgenden soll der Herleitung von Lundgren (1967) gefolgt werden, allerdings werden hier, wie bei Novikov (1967), die Wahrscheinlichkeitsdichten für die Vortizität $\omega(\mathbf{x}, t)$ betrachtet. Die zur Realisierung $\omega(\mathbf{x}, t)$ gehörige Zufallsvariable werde mit Ω bezeichnet, dann ist die feinkörnige Verteilung in drei Dimensionen

$$\delta(\omega(\mathbf{x}, t) - \Omega) = \prod_{i=1}^3 \delta(\omega_i(\mathbf{x}, t) - \Omega_i) \quad (4.1)$$

4. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

(siehe Abschnitt A.2 im Anhang). Im Zweidimensionalen ist die Vortizität ein Skalar (siehe Abschnitt 1.3) und das Produkt auf der rechten Seite von Gleichung (4.1) fällt weg. Aus der feinkörnigen Verteilung erhält man die *normale* Wahrscheinlichkeitsdichte durch Mittelwertbildung über alle Realisierungen $\omega(x, t) = \Omega'$

$$p(\Omega; x, t) = \langle \delta(\omega(x, t) - \Omega) \rangle = \int \delta(\Omega' - \Omega) p(\Omega'; x, t) d\Omega'.$$

Hier tritt in der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\Omega; x, t)$ das Semikolon auf, um zu verdeutlichen, dass dem Ort x und der Zeit t nur die Rolle eines Parameters zukommt. Die Erweiterung auf Verbundwahrscheinlichkeitsdichten ist direkt ersichtlich

$$p(\Omega_1, \Omega_2; x_1, x_2, t) = \langle \delta(\omega(x_1, t) - \Omega_1) \delta(\omega(x_2, t) - \Omega_2) \rangle,$$

und analog für höhere Mehrpunktverteilungen.

Lundgren (1967) fordert nun zwei physikalisch motivierte Eigenschaften von den Verbundwahrscheinlichkeitsdichten. Zum einen sollen sie die Separationseigenschaft (engl. *separation property*) erfüllen, d. h. die Vortizität an zwei weit auseinander liegenden Punkten soll statistisch unabhängig sein

$$\lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow \infty} p(\Omega_1, \Omega_2; x_1, x_2, t) = p(\Omega_1; x_1, t) p(\Omega_2; x_2, t).$$

Die zweite geforderte Eigenschaft, ist die Koinzidenzeigenschaft (engl. *coincidence property*). Demnach gilt

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} p(\Omega_1, \Omega_2; x_1, x_2, t) = p(\Omega_1; x_1, t) \delta(\Omega_2 - \Omega_1). \quad (4.2)$$

Die Definition dieser Eigenschaft ist durch zwei Aspekte motiviert. Einerseits sollte die Vortizität gleich sein, wenn zwei Punkte, x_1 und x_2 , zusammenfallen – diese Überlegung führt zu der Delta-Distribution in Gleichung (4.2). Andererseits sollte auch in diesem Fall die Beziehung $\int p(\Omega_1, \Omega_2; x_1, x_2, t) d\Omega_2 = p(\Omega_1; x_1, t)$ erfüllt bleiben, was das Auftreten der einfachen Wahrscheinlichkeitsdichte in (4.2) erklärt.

Schließlich soll hier noch eine Möglichkeit vorgestellt werden, bedingte Mittelwerte einzuführen. Dazu betrachtet man die Zufallsvariable Ψ und die zugehörige Realisierung $\psi(x, t)$. Dann lassen sich folgende Umformungen durchführen (siehe Pope 2000, S. 703)

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, t) \delta(\Omega - \omega(x, t)) \rangle &= \iint \Psi \delta(\Omega - \Omega') p(\Omega', \Psi; x, t) d\Omega' d\Psi \\ &= \int \Psi p(\Omega', \Psi; x, t) d\Psi \\ &= \int \Psi p(\Psi; x, t | \Omega; x, t) p(\Omega; x, t) d\Psi \\ &= \langle \psi(x, t) | \omega(x, t) = \Omega \rangle p(\Omega; x, t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, Gleichung (A.3), genutzt wurde.

4.2. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizität in zwei Dimensionen

Außerdem werden sich folgende Eigenschaften der Diracschen Delta-Distribution als nützlich erweisen

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \quad (4.4)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y) = \frac{\partial}{\partial(x-y)}\delta(x-y), \quad (4.5)$$

wobei x und y beliebige Variablen und $f(x)$ eine beliebige Funktion sind (siehe Pope 2000, Appendix C).

4.2. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizität in zwei Dimensionen

Um die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizität in zwei Dimensionen abzuleiten, beginnt man mit der partiellen Zeitableitung der zugehörigen feinkörnigen Verteilung

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) = -\frac{\partial}{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x}, t) \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)),$$

wobei die Eigenschaft (4.5) zum Einsatz kam. Räumliche Ableitungen lassen sich analog behandeln, so findet man z. B.

$$u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) = -\frac{\partial}{\partial\Omega} \left[u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)). \quad (4.6)$$

Fügt man diese beiden Terme zusammen, lässt sich die zweidimensionale Wirbeltransportgleichung (1.7) einsetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\Omega} \left[-\gamma\omega(\mathbf{x}, t) + \nu\Delta\omega(\mathbf{x}, t) + \tilde{f}(\mathbf{x}, t) \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hier wurde, wie in den in Abschnitt 5.1 besprochenen numerischen Simulationen, ein linearer Reibungsterm, $-\gamma\omega(\mathbf{x}, t)$, in die Wirbeltransportgleichung eingeführt. Er verhindert, dass sich die durch die inverse Energiekaskade transportierte Energie in großen Skalen sammelt. Experimentell lässt er sich mit der Reibung am Boden erklären (siehe z. B. Paret und Tabeling 1998).

4. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

4.2.1. Behandlung des Advektionsterms

Der zweite Term auf der linken Seite von Gleichung (4.6), lässt sich mit Hilfe der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes, $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$, auch wie folgt formulieren

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) = \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t))]. \quad (4.8)$$

4.2.2. Behandlung des Dissipationsterms

Analog zu Gleichung (4.6) kann durch zweimaliges Ableiten und Anwendung der Produktregel folgende Relation aufgestellt werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) &= -\frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) \right] \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Der erste Term auf der rechten Seite tritt, multipliziert mit der Viskosität ν , auch in Gleichung (4.7) auf und kann dort ersetzt werden.

4.2.3. Behandlung des Kraftterms

Nimmt man die Kraft als zeitlich δ -korreliert an, was in numerischen Simulationen etwa exakt erfüllt ist (vgl. Abschnitt 5.1), kann man den Term mit dem Forcing in Gleichung (4.11) wie folgt ersetzen

$$-\frac{\partial}{\partial \Omega} \left\langle \tilde{f}(\mathbf{x}, t) \middle| \Omega \right\rangle p(\Omega; \mathbf{x}, t) = +\frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} Q(0) p(\Omega; \mathbf{x}, t), \quad (4.10)$$

mit

$$Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') = \frac{1}{2} \left\langle \tilde{f}(\mathbf{x}, t) \tilde{f}(\mathbf{x}', t') \right\rangle.$$

Dieses Ergebnis tritt auch bei der Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung, wie z. B. Haken (1977, S. 160 ff.) sie durchführt, auf. Um es für den hier gezeigten Fall zu erhalten, muss die Argumentation, die Haken für eine gewöhnliche Langevin-Gleichung durchzieht, auf die Wirbeltransportgleichung mit stochastischem Antrieb ausgeweitet werden.

4.2.4. Entwicklungsgleichung für die Vortizitätswahrscheinlichkeitsdichte

Schließlich müssen noch alle Terme zusammengefügt werden. Setzt man die Gleichungen (4.8), (4.9) und (4.10) in Gleichung (4.7) ein und nutzt Relation (4.3), liefert Mittelwert-

bildung

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \Omega \rangle \right\} p(\Omega; \mathbf{x}, t) = \left\{ \nu \Delta + \frac{\partial}{\partial \Omega} \langle \gamma \omega(\mathbf{x}, t) | \Omega \rangle - \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} \left\langle \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(\mathbf{x}, t) \right] | \Omega \right\rangle + Q(0) \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} \right\} p(\Omega; \mathbf{x}, t). \quad (4.11)$$

An dieser Stelle kann nun noch der bedingte Mittelwert für den Reibungsterm ausgewertet werden, es gilt einfach $\langle \omega(\mathbf{x}, t) | \Omega \rangle = \Omega$.

4.2.5. Alternative: Kopplung an die Zweipunktverbundwahrscheinlichkeitsdichte

Eingangs wurde erwähnt, dass in der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie die N -Punktverbundwahrscheinlichkeitsdichten jeweils an die $(N + 1)$ -Punktverbundwahrscheinlichkeitsdichten koppeln. Nun tritt in Gleichung (4.11) an keiner Stelle eine Zweipunktverteilung auf. Der Grund dafür liegt in einem hier anders gewählten Ansatz, der dafür sorgt, dass statt der höheren Mehrpunktwahrscheinlichkeiten die bedingten Mittelwerte eingehen. An dieser Stelle soll kurz am Beispiel des advektiven Terms erläutert werden, wie die Kopplung ins Spiel kommt.

Dazu drückt man zunächst im advektiven Term die Geschwindigkeit mittels des zweidimensionalen Biot-Savart-Gesetzes (1.8) aus. Man erhält

$$\nabla_x \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \rangle = \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot \left\langle \int \omega(\mathbf{x}', t) \mathbf{e}_3 \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d\mathbf{x}' \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \right\rangle.$$

Die feinkörnige Verteilung kann, weil sie nicht von der Integrationsvariablen \mathbf{x}' abhängt, unter das Integral gezogen werden. Fügt man zusätzlich die Identität $\int \delta(\omega(\mathbf{x}') - \Omega') d\Omega' = 1$ ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot \left\langle \int \left(\int \delta(\omega(\mathbf{x}') - \Omega') d\Omega' \right) \omega(\mathbf{x}', t) \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_3 \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d\mathbf{x}' \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot \left\langle \iint \delta(\omega(\mathbf{x}') - \Omega') \Omega' \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_3 \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d\Omega' d\mathbf{x}' \right\rangle. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Eigenschaft (4.4) genutzt, um $\omega(\mathbf{x}', t)$ durch Ω' zu ersetzen. Zuletzt kann man nun die Mittelung unter das Integral ziehen und erhält

$$\nabla_x \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\Omega - \omega(\mathbf{x}, t)) \rangle = \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot \iint \Omega' \mathbf{e}_3 \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} p(\Omega, \Omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}', t) d\Omega' d\mathbf{x}',$$

wo explizit die Zweipunktverbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(\Omega, \Omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ auftritt. Mit den anderen Termen, die in Gleichung (4.11) durch bedingte Mittelwerte ausgedrückt werden, kann analog verfahren werden.

4. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

4.3. Verbundwahrscheinlichkeitsdichte der Vortizität in zwei Dimensionen

Das Ziel ist hier, wie im vorangegangenen Abschnitt, eine Entwicklungsgleichung herzuleiten, nun allerdings für die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte von zwei Vortizitäten $p(\Omega_1, \Omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$. Dazu differenziert man wieder die entsprechende feinkörnige Verteilung bezüglich der Zeit t

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \delta(\Omega_1 - \omega(\mathbf{x}_1, t)) \delta(\Omega_2 - \omega(\mathbf{x}_2, t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \Omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_1, t) \right] \delta(\Omega_1 - \omega(\mathbf{x}_1, t)) \delta(\Omega_2 - \omega(\mathbf{x}_2, t)) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial \Omega_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}_2, t) \right] \delta(\Omega_1 - \omega(\mathbf{x}_1, t)) \delta(\Omega_2 - \omega(\mathbf{x}_2, t)). \end{aligned}$$

Und behandelt den Term

$$\left[\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_2} \right] \delta(\Omega_1 - \omega(\mathbf{x}_1, t)) \delta(\Omega_2 - \omega(\mathbf{x}_2, t))$$

analog zu Gleichung (4.6). Dann kann man wieder die Wirbeltransportgleichung (1.7) einsetzen

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_2} \right] \delta(\Omega_1 - \omega(\mathbf{x}_1, t)) \delta(\Omega_2 - \omega(\mathbf{x}_2, t)) \\ &= \left\{ -\frac{\partial}{\partial \Omega_1} \left[-\gamma \omega(\mathbf{x}_1, t) + \nu \Delta_{\mathbf{x}_1} \omega(\mathbf{x}_1, t) + \tilde{f}(\mathbf{x}_1, t) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial \Omega_2} \left[-\gamma \omega(\mathbf{x}_2, t) + \nu \Delta_{\mathbf{x}_2} \omega(\mathbf{x}_2, t) + \tilde{f}(\mathbf{x}_2, t) \right] \right\} \\ & \quad \times \delta(\Omega_1 - \omega(\mathbf{x}_1, t)) \delta(\Omega_2 - \omega(\mathbf{x}_2, t)), \end{aligned}$$

wobei die Ableitungen nach Ω_1 bzw. Ω_2 auch auf die feinkörnigen Verteilungen wirken.

Behandelt man nun die einzelnen Terme analog zum vorigen Abschnitt, erhält man

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) | \Omega_1, \Omega_2 \rangle + \nabla_{\mathbf{x}_2} \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t) | \Omega_1, \Omega_2 \rangle \right] p(\Omega_1, \Omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ &= \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \Omega_1} \Omega_1 + \frac{\partial}{\partial \Omega_2} \Omega_2 \right] p(\Omega_1, \Omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \nu \left[\Delta_{\mathbf{x}_1} + \Delta_{\mathbf{x}_2} \right] p(\Omega_1, \Omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ & \quad - \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial \Omega_1^2} \left\langle \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{1,i}} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{1,i}} \middle| \Omega_1, \Omega_2 \right\rangle + \frac{\partial^2}{\partial \Omega_2^2} \left\langle \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{2,i}} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{2,i}} \middle| \Omega_1, \Omega_2 \right\rangle \right] p(\Omega_1, \Omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ & \quad + \left[Q(0) \frac{\partial^2}{\partial \Omega_1^2} + Q(0) \frac{\partial^2}{\partial \Omega_2^2} + Q(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \frac{\partial^2}{\partial \Omega_1 \partial \Omega_2} \right] p(\Omega_1, \Omega_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.4. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizitätsinkremente in zwei Dimensionen

wobei der Übersichtlichkeit halber die Abkürzungen $\omega(x_1, t) = \omega_1$ und $\omega(x_2, t) = \omega_2$ eingeführt wurden. An dieser Stelle könnte man noch Homogenität und Isotropie fordern und durch Projektion auf die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Vortizitätsinkrement schließen. Hier soll zu diesem Zweck anders verfahren werden.

4.4. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizitätsinkremente in zwei Dimensionen

Zunächst definiert man, analog zu den Geschwindigkeitsinkrementen (2.9), das *Vortizitätsinkrement*

$$\varpi(x_1, x_2, t) = \omega(x_2, t) - \omega(x_1, t),$$

mit $r = x_2 - x_1$. Für dieses lässt sich, analog zur einfachen Vortizität, die partielle Zeitableitung der feinkörnigen Verteilung berechnen

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) = - \frac{\partial}{\partial \Pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \varpi(x_1, x_2, t) \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)),$$

wobei hier Π die Zufallsvariable zum Vortizitätsinkrement bezeichnet. Auch die räumlichen Ableitungen nach x_1 und x_2 lassen sich analog durchziehen

$$\mathbf{u}_{1/2} \cdot \nabla_{x_{1/2}} \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) = - \frac{\partial}{\partial \Pi} \left[\mathbf{u}_{1/2} \cdot \nabla_{x_{1/2}} \varpi(x_1, x_2, t) \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)).$$

Hier wurde, wie schon im vorangegangenen Abschnitt für die Vortizität, die Abkürzung $\mathbf{u}_{1/2} = \mathbf{u}(x_{1/2}, t)$ benutzt. Addiert man die zeitliche und die räumlichen Ableitungen, kann man, analog zu Gleichung (4.7), zwei mal die Wirbeltransportgleichung (1.7) einsetzen

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(x_1, t) \cdot \nabla_{x_1} + \mathbf{u}(x_2, t) \cdot \nabla_{x_2} \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial \Pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \omega_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla_{x_2} \omega_2 - \frac{\partial}{\partial t} \omega_1 - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_{x_1} \omega_1 \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial \Pi} \left[-\gamma \omega_2 + \nu \Delta_{x_2} \omega_2 + \tilde{f}_2 + \gamma \omega_1 - \nu \Delta_{x_1} \omega_1 - \tilde{f}_1 \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)). \quad (4.13) \end{aligned}$$

Die Behandlung der advektiven Terme läuft genau wie im Abschnitt 4.2 für die einfache Vortizität. Die dissipativen Terme bedürfen einer etwas genaueren Betrachtung. Differenziert man die feinkörnige Verteilung wieder zweimal bezüglich einer räumlichen Komponente erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_{1,i} \partial x_{1,i}} \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) &= + \frac{\partial}{\partial \Pi} \left[\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_{1,i} \partial x_{1,i}} \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{1,i}} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{1,i}} \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) \end{aligned}$$

4. Die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_{2,i} \partial x_{2,i}} \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) &= - \frac{\partial}{\partial \Pi} \left[\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_{2,i} \partial x_{2,i}} \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{2,i}} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{2,i}} \right] \delta(\Pi - \varpi(x_1, x_2, t)). \end{aligned}$$

Man beachte das unterschiedliche Vorzeichen auf der rechten Seite. Es tritt auf, wenn man die Ableitung von $\varpi(x_1, x_2, t)$ auswertet.

Setzt man die umgeformten advektiven und dissipativen Terme in Gleichung (4.13) ein und bildet den Mittelwert, so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{x_1} \cdot \langle \mathbf{u}(x_1, t) | \Pi \rangle + \nabla_{x_2} \cdot \langle \mathbf{u}(x_2, t) | \Pi \rangle \right] p(\Pi; x_2, x_1, t) \\ &= \gamma \frac{\partial}{\partial \Pi} \langle \varpi(x_1, x_2, t) - [\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1] | \Pi \rangle p(\Pi; x_1, x_2, t) \\ &\quad + \left\{ \nu \Delta_{x_1} - \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left\langle \nu \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{1,i}} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{1,i}} \right] | \Pi \right\rangle \right\} p(\Pi; x_1, x_2, t) \\ &\quad + \left\{ \nu \Delta_{x_2} - \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left\langle \nu \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{2,i}} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x_{2,i}} \right] | \Pi \right\rangle \right\} p(\Pi; x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

Schließlich fordert man noch Homogenität und Isotropie, so dass alle Größen nur noch vom Abstand $r = |x_2 - x_1|$ abhängen. Nutzt man weiterhin die Relationen $\nabla_{x_1} = -\nabla_r$ und $\nabla_{x_2} = \nabla_r$ aus, erhält man

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_r \cdot \langle \mathbf{v}(r, t) | \Pi \rangle \right] p(\Pi; r, t) \\ &= \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial \Pi} \Pi + \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} Q^{12}(r) \right\} p(\Pi; r, t) \\ &\quad + \left\{ +2\nu \Delta_r - \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left\langle 2\nu \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] | \Pi \right\rangle \right\} p(\Pi; r, t). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Der Kraftterm bedarf dabei noch eines Kommentars. Im Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, wie man die Kraft $\tilde{f}(\mathbf{x}, t)$ durch die räumliche Korrelation $Q(0)$ ersetzt. Hier wird analog der Term $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1$ ersetzt, wozu, äquivalent zu $Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, ein $Q^{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2, r)$ gehört, welches wie folgt definiert ist

$$Q^{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2, r) = \left\langle \left[\tilde{f}(\mathbf{x}_2) - \tilde{f}(\mathbf{x}_1) \right] \left[\tilde{f}(\mathbf{x}'_2) - \tilde{f}(\mathbf{x}'_1) \right] \right\rangle,$$

4.4. Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizitätsinkremente in zwei Dimensionen

so dass man findet

$$Q^{12}(0,0,r) = \left\langle \tilde{f}(x_1)^2 + \tilde{f}(x_2)^2 - 2\tilde{f}(x_1)\tilde{f}(x_2) \right\rangle$$

und im homogen isotropen Fall

$$Q^{12}(0,0,r) = Q^{12}(r) = 2[Q(0) - Q(r)].$$

Der Term $Q^{12}(r)$ in Gleichung (4.14) ist also vollständig durch die Korrelationsfunktion der Kraft bestimmt.

Zuallerletzt lassen sich noch in Gleichung (4.14) unter Ausnutzung des Nablaoperators in Polarkoordinaten die Ableitungen in r -Richtung umformulieren

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left\langle v_\ell(r,t) \middle| \Pi \right\rangle \right] p(\Pi; r, t) \\ &= \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial \Pi} \Pi + 2 \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} Q^{12}(r) \right\} p(\Pi; r, t) \\ &+ \left\{ 2\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left\langle 2\nu \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] \middle| \Pi \right\rangle \right\} p(\Pi; r, t). \end{aligned}$$

Die so gewonnene Gleichung beschreibt die Entwicklung der Zweipunktwahrscheinlichkeitsdichte der Vortizitätsinkremente in zweidimensionalen Strömungen. Sie ist nicht geschlossen, da die auftretenden bedingten Mittelwerte nicht analytisch zugänglich sind. Allerdings kann man Annahmen oder ein Modell für letztere formulieren und so zu einem Schließungsansatz gelangen. In Kapitel 6 werden die Grundzüge eines solchen Schließungsansatzes für obige Gleichung besprochen.

Teil II.
Ergebnisse

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

In Kapitel 2 wurde das Bild der Energiekaskade eingeführt. Besonders hervorgehoben wurde dabei die unterschiedliche Richtung des Energieflusses in zwei- bzw. dreidimensionaler Turbulenz. In Kapitel 3 wurde dann ein von Friedrich und Peinke (1997a) vorgeschlagener innovativer Zugang zur Beschreibung der Energiekaskade präsentiert. Die interessanten Resultate, die sich aus diesem Ansatz für dreidimensionale Turbulenz ergeben, wurden in groben Zügen skizziert. Im Folgenden wird nun gezeigt werden, wie sich der Zugang von Friedrich und Peinke auf den Fall der inversen Energiekaskade in zweidimensionaler Turbulenz erweitern lässt.

5.1. Charakterisierung der benutzten Daten

Die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse beruhen auf Daten aus einer direkten numerischen Simulation (DNS) zweidimensionaler Turbulenz im Regime der inversen Kaskade. Der benutzte Quelltext wurde von O. Kamps entwickelt und z. B. von Kamps und Friedrich (2008) oder, detaillierter, von Kamps (2009) vorgestellt.¹ Dennoch soll auch an dieser Stelle das Vorgehen kurz skizziert werden.

In der DNS wird die Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \omega(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta^\alpha \omega(\mathbf{x}, t) - \gamma \omega(\mathbf{x}, t) - \Delta f(\mathbf{x}, t).$$

auf einem quadratischen Gitter mit Kantenlänge 2π und periodischen Randbedingungen integriert. Dazu bedient man sich für den Zeitschritt eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung; die Ortsableitungen werden mittels eines Pseudospektralverfahrens im Fourier-Raum berechnet. Der sogenannte *Forcing*term, $-\Delta f$, führt dem System auf kleinen Skalen Energie zu. Das *Forcing* ist so gewählt, dass für seine Korrelationsfunktion gilt

$$\langle f(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) f(\mathbf{x}, t') \rangle \sim \mathcal{A} \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) \delta(t - t'),$$

wobei l_c die Korrelationslänge ist und \mathcal{A} ein Parameter, der den Energieeintrag bestimmt. Der Reibungsterm $-\gamma\omega$ entnimmt dem System Energie auf großen Skalen. Statt der üblichen Viskosität wird in der Simulation eine sogenannte Hyperviskosität $\nu\Delta^\alpha\omega$ mit $\alpha > 1$ eingeführt. Diese beschränkt den glättenden Einfluss der Viskosität auf kleinere Skalen und ermöglicht so einen längeren Inertialbereich.

¹Ein ähnlicher Code wird von Wilczek (2007) recht ausführlich diskutiert.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

Tabelle 5.1.: Simulationsparameter der beiden benutzten Simulationen.

Bezeichnung	Auflösung	α	l_c	\mathcal{A}	γ	ν
sim1024	1024	8	0,005	1,5	0,05	$7,5 \cdot 10^{-39}$
sim4096	4096	8	0,00125	1,5	0,125	$2,4 \cdot 10^{-48}$
sim1024smooth	1024	8	0,012	1,75	0,07	$1,3 \cdot 10^{-39}$

Tabelle 5.2.: Charakteristische Größen der Daten aus den beiden benutzten Simulationen.

Bezeichnung	L	λ	u_{rms}	ε	N_{data}
sim1024	0,364	0,0338	0,655	0,0388	$\mathcal{O}(10^8)$
sim4096	0,0968	0,00824	0,434	0,0425	$\mathcal{O}(10^9)$
sim1024smooth	0,237	0,0365	0,619	0,0465	$\mathcal{O}(10^8)$

Es werden Daten aus drei unterschiedlichen Simulationsdurchläufen benutzt: Einer mit einer räumlichen Auflösung von 1024×1024 Gitterpunkten (hier als `sim1024` bezeichnet) und ein weiterer mit 4096×4096 Gitterpunkten (`sim4096`). Für diese beiden Simulationen wurden die Parameter jeweils derart angepasst, dass sie den K41-Hypothesen entsprechen und einen möglichst langen Skalierungsbereich aufweisen. Bei dem dritten Simulationslauf wurde die Korrelationslänge der Kraft l_c so groß gewählt, dass sich ein *glatteres Forcing* ergibt. Dadurch wird der Anfang des $k^{-5/3}$ -Skalierungsbereichs zu größeren Skalen geschoben und die Hypothese der Selbstähnlichkeit ist weniger gut erfüllt, als in den anderen beiden Simulationen. Die Simulationsparameter und charakteristischen Größen der drei Läufe sind in den Tabellen 5.1 und 5.2 dargestellt.

Zur Veranschaulichung werden in Abbildung 5.1 ein Vortizitäts- und ein Geschwindigkeitsfeld gezeigt. Im Vortizitätsfeld $\omega(x, t)$ erkennt man deutlich kohärente Strukturen in Form von Wirbeln. Das Geschwindigkeitsfeld $u(x, t)$ zeigt Strömungen, die sich über im Vergleich zu den Wirbeln große Bereiche erstrecken. Betrachtet man die zeitliche Entwicklung, kann man erkennen, wie Wirbel im großskaligen Geschwindigkeitsfeld mitgeführt werden.

In den Abbildungen 5.2 bis 5.4 werden zum Vergleich mit anderen Simulationen, wie von Boffetta et al. (2000), und Experimenten (z. B. Paret und Tabeling 1998, 1997) einige typische Größen dargestellt. Abbildung 5.2 zeigt die Energiespektren $E(k)$ für alle drei Datensätze. Man erkennt deutlich den $k^{-5/3}$ -Skalierungsbereich. Außerdem wird der spektrale Energiefluss für den Simulationslauf `sim4096` gezeigt. Dieser ist negativ, das bedeutet die Energie fließt, wie im zweidimensionalen Fall für das $k^{-5/3}$ -Spektrum von Kraichnan (1967) vorausgesagt (siehe Abschnitt 2.6), in Richtung großer Skalen. Abbildung 5.3 präsentiert die dritte longitudinale Strukturfunktion $S_\ell^3(r)$ für die man nach Kolmogorov (1941b) ein lineares Verhalten erwartet (siehe Gl. (2.12)). Dass dies in den genutzten Simulationen nur näherungsweise erfüllt ist, lässt sich in erster Linie auf den "nur" linearen Reibungsterm zurückführen – näheres dazu findet sich bei Kamps (2009). Schließlich werden in Abbildung 5.4 noch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der longitudinalen Geschwin-

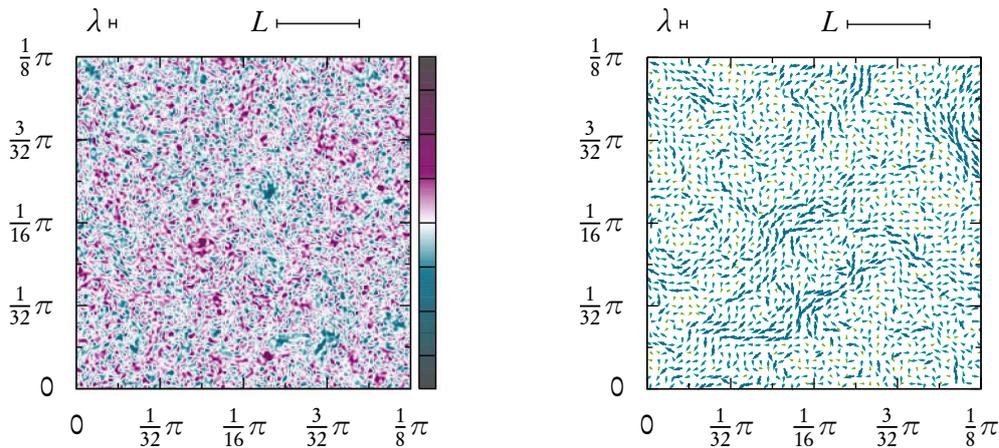


Abbildung 5.1.: Linke Seite: Ausschnitt aus einem Vortizitätsfeld $\omega(x, t)$, farbkodiert. Rechte Seite: Die zugehörige Geschwindigkeit $u(x, t)$ als Vektorfeld; die Vektoren werden mit zunehmendem Geschwindigkeitsbetrag dicker, dunkler und länger. Die Felder stammen aus dem Datensatz `sim4096`.

digkeitsinkremente aller drei Simulationsläufe für verschiedene Abstände r dargestellt. Für die Simulationsläufe `sim1024` und `sim4096` sind die pdfs annähernd gaußisch und stimmen für alle $\lambda < r < L$ überein – hier ist die Hypothese der Selbstähnlichkeit gut erfüllt. Die pdfs aus dem Datensatz `sim1024smooth` zeigen hier, insbesondere für kleine Abstände r , etwas größere Abweichungen sowohl vom gaußischen Verhalten, als auch von der Selbstähnlichkeit.

Da im Folgenden longitudinale Geschwindigkeitsinkremente (vgl. Definition (2.10)) untersucht werden sollen, bietet es sich noch an die Größe σ_∞ zu definieren

$$\sigma_\infty = \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \langle v_\ell(r)^2 \rangle \right]^{1/2} = \sqrt{2} u_{\text{rms}}. \quad (5.1)$$

Sie ermöglicht die einheitliche Darstellung verschiedener Inkremente in Einheiten von σ_∞ .

5.2. Markow-Eigenschaft

In Abschnitt 3.1 wurde die Markow-Bedingung eingeführt als

$$p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3; \dots v_N, r_N) = p(v_1, r_1 | v_2, r_2). \quad (5.2)$$

Um die Markow-Eigenschaft für ein beliebiges System nachzuweisen, müsste man streng genommen Gl. (5.2) für beliebig großes N und alle Kombinationen von Abständen r_i überprüfen. Das ist in dem Umfang natürlich nicht möglich. Neben der Tatsache, dass man nicht *alle* Kombinationen der r_i überprüfen kann, beschränkt die der Auswertung

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

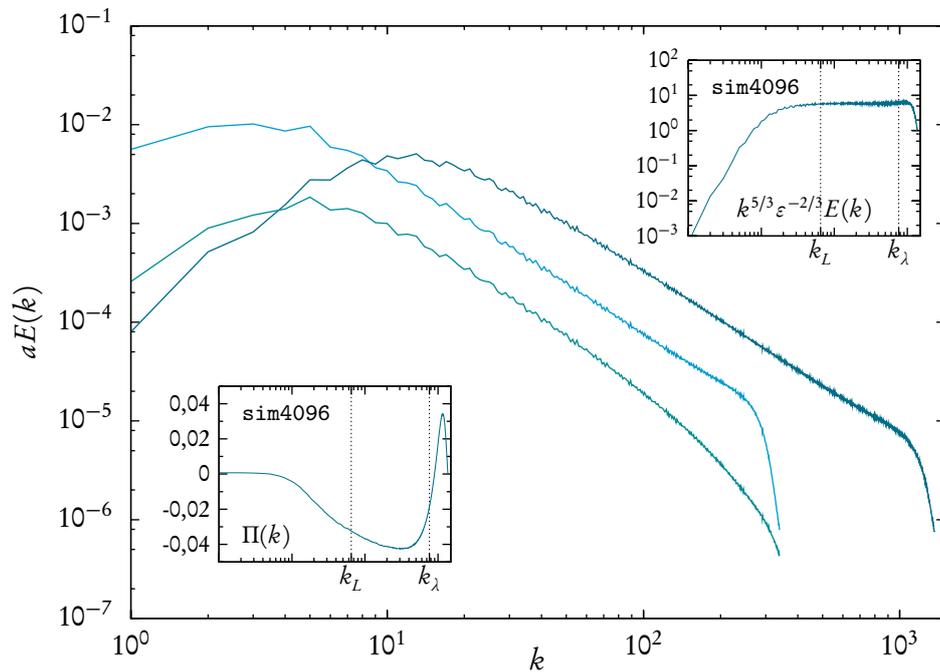


Abbildung 5.2.: Das große Diagramm zeigt die Energiespektren $E(k)$ für die drei benutzten Simulationsläufe; von oben nach unten: sim4096 skaliert mit $a = 1,0$, sim1024 skaliert mit $a = 0,25$ und sim1024smooth skaliert mit $a = 0,0625$. Die beiden kleinen Abbildungen zeigen das kompensierte Energiespektrum bzw. den Energiefluss $\Pi(k)$ für den Simulationslauf sim4096. Die gezeigten Wellenzahlbereiche sind überall die gleichen, bei den kleinen Graphen wurden zusätzlich die zur integralen Länge L und zur Taylor-Länge λ gehörigen Wellenzahlen gekennzeichnet.

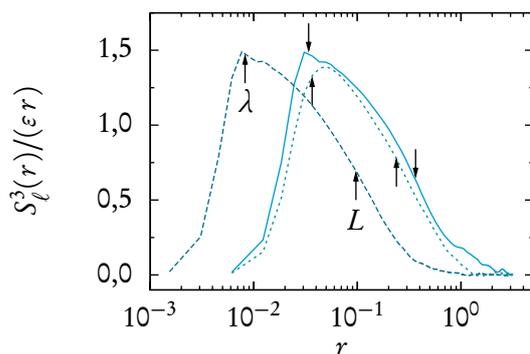


Abbildung 5.3.: Dritte longitudinale Strukturfunktion $S_\ell^3(r)$ kompensiert mit (ϵr) . Durchgezogene Linie: sim1024, gestrichelte Linie: sim4096, gepunktete Linie: sim1024smooth. Pfeile markieren die jeweilige Lage der Taylor-Länge λ bzw. der integralen Länge L . Nach Kolmogorov (1941b, siehe Gl. (2.12)) würde man im Inertialbereich ein Plateau erwarten.

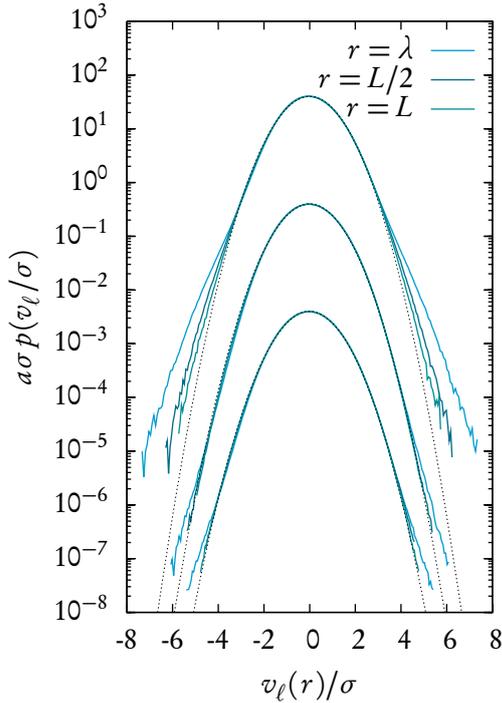


Abbildung 5.4.: Halblogarithmische Darstellung der normierten Wahrscheinlichkeitsdichten der longitudinalen Inkremente für verschiedene Abstände r und alle drei Datensätze; von oben nach unten: `sim1024smooth` skaliert mit $a = 10^2$, `sim4096` unskaliert ($a = 1$) und `sim1024` skaliert mit $a = 10^{-2}$. Hier gibt $\sigma = \langle v_\ell(r)^2 \rangle^{1/2}$ die Standardabweichung der Inkremente an. In gepunkteten Linien werden jeweils entsprechende Gauß-Funktionen gezeigt.

zugrunde liegende Datenmenge das maximale N . Angenommen man möchte die jpdf $p(v_1, r_1; v_2, r_2; v_3, r_3; v_4, r_4)$ mittels eines Histogramms mit 100 Klassen schätzen², um daraus die dreifach bedingte pdf $p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3, v_4, r_4)$ zu bestimmen: Dann bräuchte man, unter der äußerst unrealistischen Annahme der Gleichverteilung der Inkremente, mindestens $10 \cdot (10^2)^4 = 10^9$ Datenpunkte um jede Klasse mit nur 10 Einträgen füllen zu können – das entspricht ca. 1000 simulierten Feldern mit 1024×1024 Gitterpunkten. Der vorliegenden Arbeit liegen “nur” rund 300 solcher Felder zugrunde, was im Vergleich zu typischen Experimenten als sehr viel angesehen werden kann. Außerdem liegt der Großteil der Daten um $v = 0$ zentriert, so dass Gleichung (5.2) nur für den Fall $N = 3$ sinnvoll untersucht werden kann.

Um die Anzahl der auszuwertenden Kombinationen einzuschränken, wird weiter festgelegt

$$r_2 = r_1 - \Delta r \quad \text{und} \quad r_3 = r_1 - 2\Delta r. \quad (5.3)$$

Von nun an genügt also die Angabe von zwei Abständen, etwa r_1 und Δr , um die anderen eindeutig zu bestimmen.

5.2.1. Numerische Behandlung

Die Ergebnisse der drei Simulationsläufe liegen in Form von Vortizitätsfeldern zu verschiedenen Zeitpunkten vor. Der zeitliche Abstand ist dabei so groß, dass die Felder als

²Zum Schätzen von Verteilungsfunktionen siehe im Anhang Abschnitt C.1.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

unkorreliert betrachtet werden können. Aus der Vortizität wird im Fourier-Raum die Geschwindigkeit berechnet, so dass man, nach Rücktransformation in den Ortsraum, jeweils ein Feld für die beiden Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes erhält. Nun kann an jedem Raum- und zu jedem Zeitpunkt das longitudinale Inkrement berechnet werden. Zur Schätzung der zweidimensionalen jpdf $p(v_1, r_1; v_2, r_2)$ wird ein zweidimensionales Histogramm aus 201×201 Klassen benutzt, in das alle longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente, die im Intervall $[-v_{max}, v_{max}]$ liegen, eingetragen werden. Dabei ist v_{max} der Betrag des maximalen auftretenden longitudinalen Geschwindigkeitsinkrements.³

Aus dem so entstandenen Histogramm kann eine Schätzung für die jpdf bestimmt werden und aus dieser, oder einfacher direkt aus dem Histogramm, dann die cpdf $p(v_1, r_1 | v_2, r_2)$. Die zweifach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3)$ kann analog aus einem dreidimensionalen Histogramm bestimmt werden. Interessiert man sich allerdings nur für bestimmte Schnitte durch die zweifach bedingte pdf, so genügt es, nach obigem Schema vorzugehen, dabei aber nur solche Ereignisse in das Histogramm einzutragen, für die auch $v(r_3)$ in die zu v_3 gehörige Klasse fällt. In der vorliegenden Arbeit kamen, je nach Erfordernis, beide Methoden zum Einsatz.

Für eine Abschätzung der (Un-)Genauigkeit, mit der die pdfs geschätzt werden, wird in jeder Klasse des obigen Histogramms ein Fehler $\sqrt{N_{ik}}$ angenommen⁴, wobei N_{ik} die Anzahl der Einträge in der i - k -ten Klasse ist. Über *gaußsche Fehlerfortpflanzung* (siehe z. B. Bronstein und Semendjajew 1996) lässt sich dann jedem Eintrag der jpdf und der cpdf eine Art Meßunsicherheit $\Delta p(v_1, r_1; v_2, r_2)$ bzw. $\Delta p(v_1, r_1 | v_2, r_2)$ zuordnen.

5.2.2. Ergebnisse

Die aus den Daten geschätzten zweifach bedingten pdfs $p(v_1, r_1 | v_2, r_2, v_3, r_3)$ können als Wolke in einem aus v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Koordinatensystem dargestellt werden (siehe Abb. 5.5). Die Aussage der Markow-Bedingung ist nun, dass jeder Schnitt senkrecht zur v_3 -Achse durch diese Wolke gerade gleich der einfach bedingten pdf $p(v_1, r_1 | v_2, r_2)$ sein muss. Diese Schnitte lassen sich sehr anschaulich als Höhenliniendiagramme darstellen (siehe Abb. 5.6). Die Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigen solche Konturliniendiagramme für verschiedene Schnitte, Abbildung 5.9 zeigt den Verlauf zweier Schnitte für zunehmendes Δr . Bei Schnitten durch pdfs mit genügend großem Δr erkennt man, dass alle Konturlinien bis auf Fluktuationen im Außenbereich übereinstimmen. Zum Teil rühren die Abweichungen im Außenbereich, wie auch die Tatsache, dass die zweifach bedingten pdfs für verschiedenes v_3 an verschiedenen Stellen in der v_1 - v_2 -Ebene liegen, von der endlichen Datenmenge her. Andererseits scheint ein Teil der Abweichungen, insbesondere für die Simulation `sim1024smooth` (siehe Abb. 5.8), auch bei größeren Datenmengen persistent zu sein. Da sie aber die zentralen Bereiche der pdfs nicht berühren, kann man die Markow-

³In dieser Arbeit handelt es sich bei v_{max} genau genommen um eine Schätzung für den Betrag des maximalen auftretenden Geschwindigkeitsinkrements, beruhend auf der Auswertung der Geschwindigkeitskomponentenfelder zu einem Zeitpunkt.

⁴Es sei noch einmal explizit darauf hingewiesen, dass es sich bei dem Fehler $\sqrt{N_{ik}}$ um eine Annahme und kein exaktes Resultat handelt. Die einzelnen Einträge in das Histogramm N_{ik} können nicht, wie man es etwa bei radioaktiven Zerfallsprozessen macht, als untereinander unkorreliert betrachtet werden.

sim4096

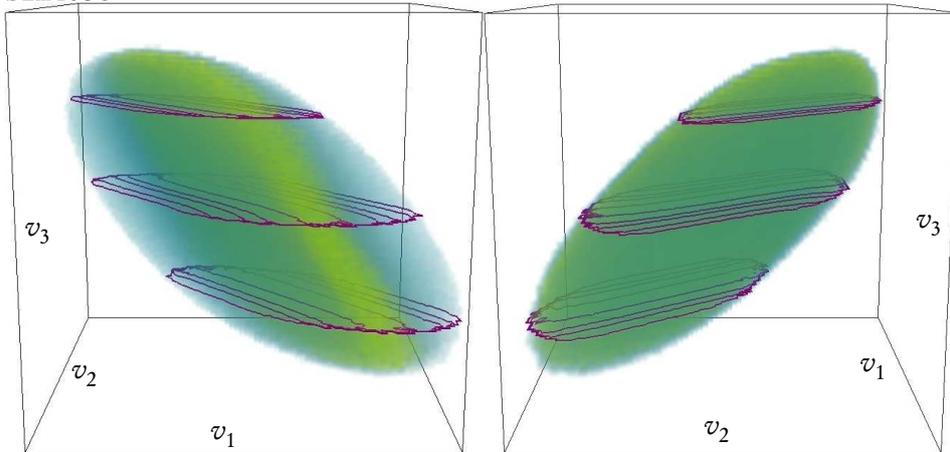


Abbildung 5.5.: Dreidimensionale Darstellung der zweifach bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3)$ mit $r_1 = L/2 + 3\lambda$, $r_2 = L/2$ und $r_3 = L/2 - \lambda$. Der Wert der cpdf an jedem Raumpunkt wird sowohl durch die Farbwahl, als auch durch die Transparenz dargestellt. Zusätzlich werden in Schnitten bei $v_3 = 0$ und jeweils bei $v_3 = \pm 1,5\sigma_\infty$ die Konturlinien in der v_1 - v_2 -Ebene gezeigt.

sim4096

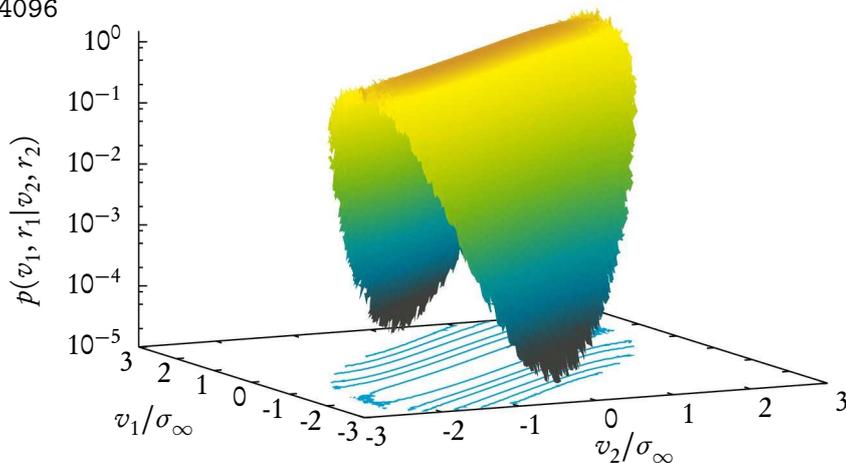


Abbildung 5.6.: Veranschaulichung der Höhenliniendarstellung. Auf der senkrechten Achse ist die einfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v_1, r_1 | v_2, r_2)$ für $r_1 = 5\lambda$ und $r_2 = 3\lambda$ mit farbkodierter Oberfläche aufgetragen. Auf dem Boden des Diagramms werden die Konturlinien für 1 , $10^{-1/2}$, 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} und 10^{-4} gezeigt.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

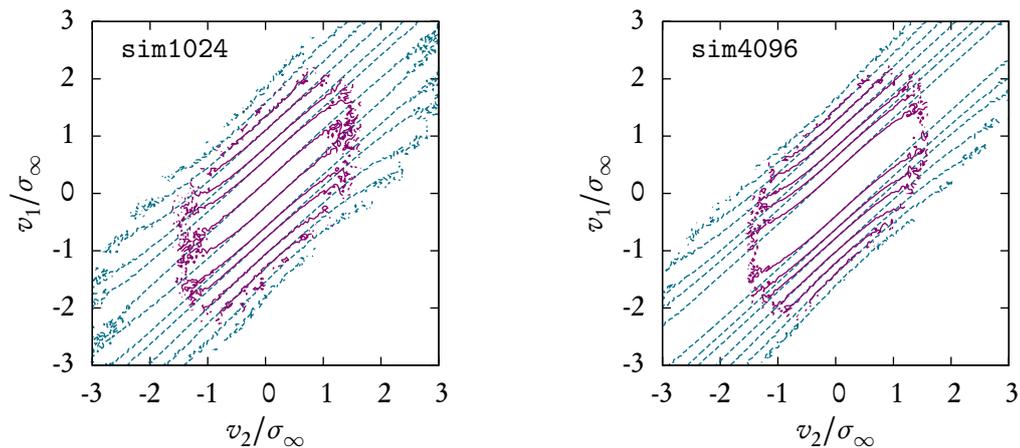


Abbildung 5.7.: Konturliniendiagramm der bedingten pdfs $p(v_1, L/2 + \lambda | v_2, L/2)$ (durchbrochene Linien) und $p(v_1, L/2 + \lambda | v_2, L/2; v_3 = 0, L/2 - \lambda)$ (durchgezogene Linien) für zwei verschiedene Simulationsläufe. Die Höhenlinien liegen, bis auf Abweichungen in den Außenbereichen, aufeinander, d. h. die Markow-Bedingung ist (im Rahmen der Prüfmöglichkeiten) erfüllt.

Bedingung zumindest als näherungsweise erfüllt betrachten. Weitere Evidenz für diese Annahme liefert die Betrachtung einzelner Schnitte durch die Höhenliniendiagramme (Abbildung 5.10). Diese Schnitte unterstreichen die gute Übereinstimmung von einfach und zweifach bedingter pdf.

Abbildung 5.9 liefert in gewisser Hinsicht eine Illustration für die Interpretation der Markow-Eigenschaft als nächst einfacheren Fall nach der statistischen Unabhängigkeit. Bei sehr kleinem Δr (Abb. 5.9 oben) liegen die cpdfs schräg in der v_1 - v_2 -Ebene, das heißt das Inkrement $v_1(r_1)$ hängt statistisch stark vom Inkrement $v_2(r_2)$ ab. Für wachsendes Δr beginnen die cpdfs zu *kippen*. Statistische Unabhängigkeit wäre erreicht, wenn die cpdfs waagrecht in der v_1 - v_2 -Ebene lägen, aber noch bevor dieser Fall eintritt, liegen die einfach und die zweifach bedingten pdfs übereinander, d. h. ist die Markow-Bedingung erfüllt.

Insgesamt, lässt sich nach obigen Betrachtungen festhalten, ist die Markow-Bedingung mindestens näherungsweise für genügend große Δr erfüllt. Diese Tatsache zeigt die Existenz einer Markow-Einstein-Länge, welche im nächsten Abschnitt bestimmt werden soll.

5.3. Markow-Einstein-Länge

Um die bisherigen qualitativen Ergebnisse zu quantifizieren, braucht man ein Maß zum Vergleich der einfach und zweifach bedingten pdfs. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten: Friedrich, Zeller, und Peinke (1998) benutzen einen χ^2 -Test, während Renner et al. (2001) und Renner (2002) auf den Wilcoxon-Test zurückgreifen (Wilcoxon 1945). Weitere Möglichkeiten finden sich z. B. bei Nawroth und Peinke (2006). In der vorliegenden Arbeit

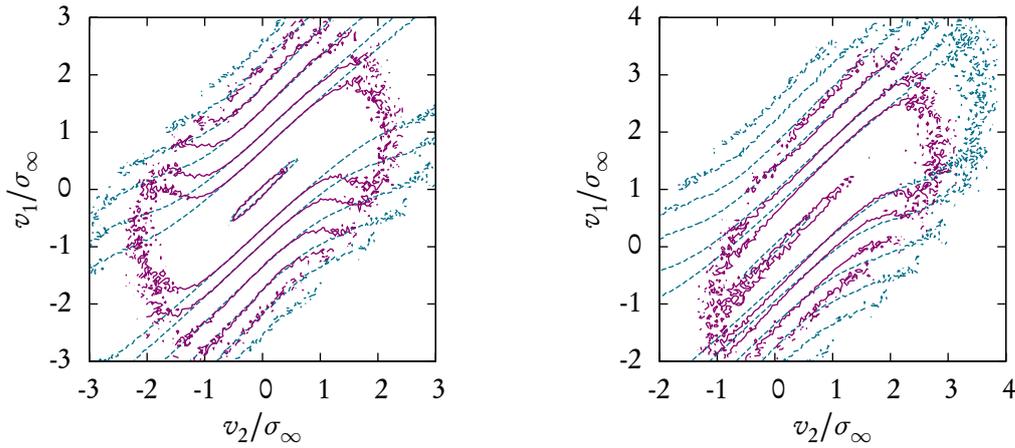


Abbildung 5.8.: Konturliniendiagramm der bedingten pdfs $p(v_1, L/2 + 3\lambda/2 | v_2, L/2)$ (durchbrochene Linien) und $p(v_1, L/2 + 3\lambda/2 | v_2, L/2; v_3, L/2 - 3\lambda/2)$ (durchgezogene Linien). Linke Seite: $v_3 = 0$, gute Übereinstimmung der pdfs im Zentrum, relativ starke Abweichungen in den Außenbereichen. Rechte Seite: $v_3 = \sigma_\infty$, die Höhenlinien verlaufen auch im zentralen Bereich leicht verkippt zueinander, die Markow-Bedingung ist nicht erfüllt. (Daten aus `sim1024smooth`)

kommen folgende Abstandsmaße zum Einsatz

- › Die Korrelation zwischen den beiden pdfs

$$\tilde{d}_C(r_1, \Delta r, v_2, v_3) := \frac{\int p(v_1, r_1 | v_2, r_2) p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3) dv_1}{\sqrt{\int p^2(v_1, r_1 | v_2, r_2) dv_1} \sqrt{\int p^2(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3) dv_1}}.$$

Die Korrelation ist ein übliches Maß, um zwei Funktionen miteinander zu vergleichen. Stimmen die beiden pdfs überein, so strebt \tilde{d}_C gegen eins.

- › Die Kullback-Leibler-Divergenz nach Kullback und Leibler (1951)

$$\tilde{d}_{\text{KL}}(r_1, \Delta r, v_2, v_3) := \int p(v_1, r_1 | v_2, r_2) \ln \left(\frac{p(v_1, r_1 | v_2, r_2)}{p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3)} \right) dv_1.$$

Dieses Maß wird in der Informationstheorie zum Vergleich zweier pdfs benutzt. Allerdings ist es im streng mathematischen Sinne aufgrund seiner Asymmetrie kein Abstand. Für übereinstimmende pdfs geht die Kullback-Leibler-Divergenz gegen null.

Beide soeben vorgestellten Abstandsmaße hängen parametrisch von den Bedingungen v_2 und v_3 ab. Diese Abhängigkeit lässt sich durch Mittelwertbildung eliminieren,

$$d_i(r_1, \Delta r) = \mathcal{N} \sum_{v_2, v_3} \tilde{d}_i(r_1, \Delta r, v_2, v_3), \quad i = \text{KL}, C, \quad (5.4)$$

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

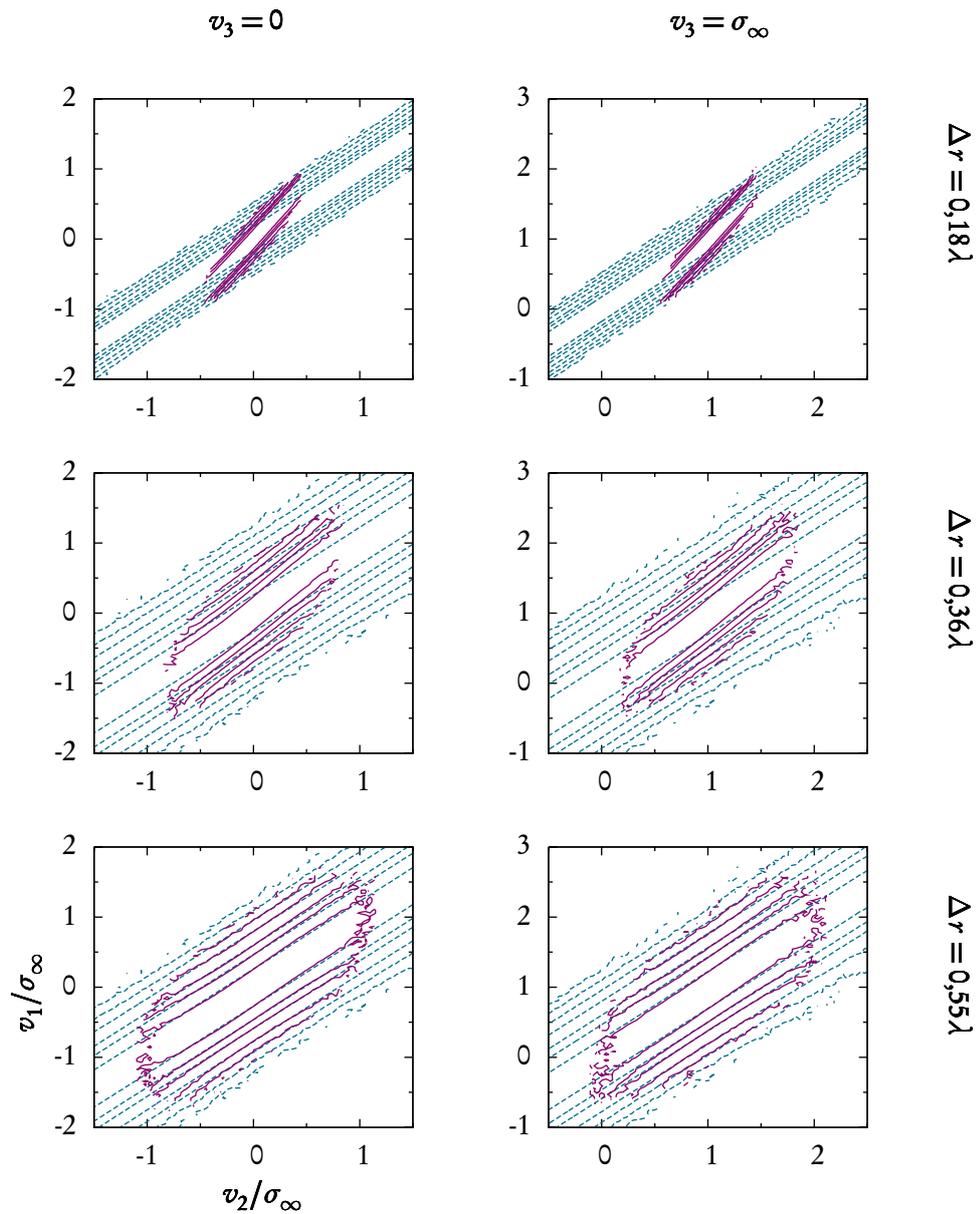


Abbildung 5.9.: Diese Graphen zeigen jeweils Konturliniendiagramme der einfach bedingten pdf $p(v_1, L | v_2, L - \Delta r)$ (durchbrochene Linien) und der zweifach bedingten pdf $p(v_1, L | v_2, L - \Delta r; v_3, L - 2\Delta r)$ (durchgezogene Linien) für verschiedene Sprungweiten Δr und verschiedene Bedingungen v_3 . Die Daten stammen aus dem Simulationslauf sim1024. Für kleine Δr stimmen die pdfs nicht überein, erst für das größte hier gezeigte Δr liegen alle Konturlinien übereinander.

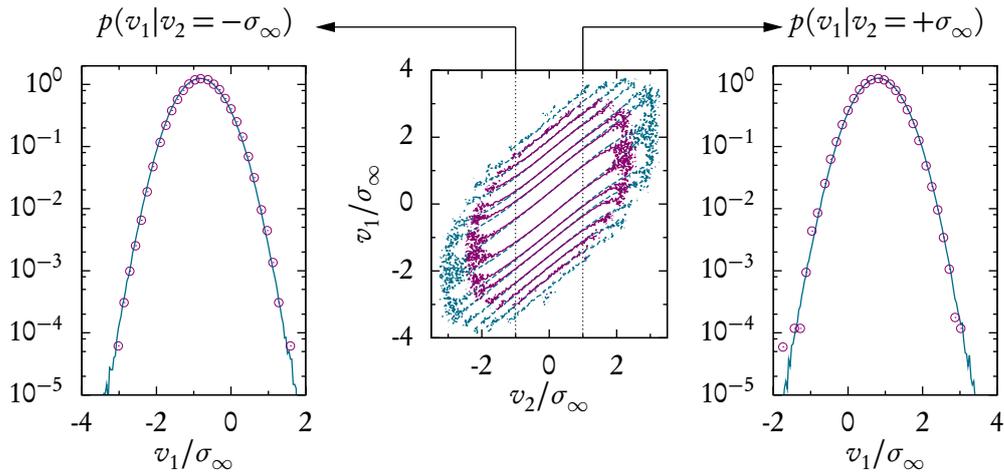


Abbildung 5.10.: Der Graph in der Mitte zeigt ein Konturliniendiagramm der einfach und zweifach bedingten pdfs für $r_1 = 7\lambda$, $\Delta r = 3\lambda$ und $v_3 = 0$ aus der Simulation `sim4096`. Außen werden Schnitte durch die beiden Dichten bei $v_2 = \pm\sigma_\infty$ gezeigt, wobei die durchgezogene Linie die einfach bedingte pdf darstellt und die Kreise die zweifach bedingte. Der Übersichtlichkeit halber werden nicht alle gemessenen *Bins* als Kreis gezeigt.

wobei der Normierungsfaktor \mathcal{N} dem Kehrwert der Anzahl der in die Summe eingegangenen Bedingungen entspricht. Die angegebenen Maße hängen wegen der Beziehung (5.3) nur von r_1 und Δr ab. Natürlich ist es genauso ausreichend, wie stellenweise im Folgenden auch passiert, r_2 oder r_3 und Δr anzugeben.

Bei der Auswertung der Daten hat es sich als besonders wichtig erwiesen, die Unsicherheit, mit der die einzelnen Werte der einfach und zweifach bedingten pdfs bestimmt wurden, zu berücksichtigen. In die Berechnung der Abstandsmaße flossen nur solche Werte ein, deren relativer Fehler eine gewisse Schranke nicht überschritt. Für die hier gezeigten Ergebnisse wurde die Schranke auf 20% festgelegt, wobei der exakte Wert keinen großen Einfluß hat – mit einer Schranke von 50% etwa, sehen die Ergebnisse qualitativ gleich aus. Wichtig ist nur sicherzustellen, dass *Ausreißer* aus den statistisch schlecht bestimmten Außenbereichen aussortiert werden. Passiert das nicht, gewinnen diese Werte zu großen Einfluß und die Abstandsmaße sind nicht mehr aussagekräftig.

Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen das Korrelationsmaß $d_C(r_1, \Delta r)$ für die drei Datensätze. Die Ergebnisse für `sim1024` und `sim4096` sind sehr ähnlich: Ab $\Delta r \approx 0,5\lambda$ ist die Bedingung $d_C(r_1, \Delta r) = 1$ näherungsweise erfüllt, d. h. die einfach und zweifach bedingten pdfs stimmen überein, die Markow-Bedingung ist erfüllt. Für die Daten aus `sim1024smooth` hingegen konvergiert das Korrelationsmaß erst für $\Delta r \approx 1,75\lambda$, außerdem konvergieren hierbei Schnitte bei höherem v_3 langsamer. Diese Tendenz ist auch bei den anderen beiden Simulationsläufen zu erkennen, ist dort aber bei Weitem nicht so ausgeprägt.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

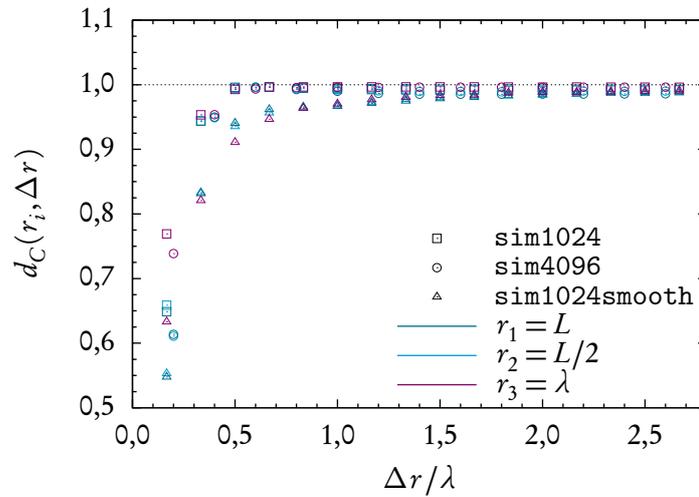


Abbildung 5.11.: Das Korrelationsmaß $d_C(r_i, \Delta r)$ für verschiedene Basislängen r_i und alle drei Simulationsläufe. Für die Datensätze `sim1024` und `sim4096` konvergiert das Maß schon für Abstände $\Delta r \approx 0,5\lambda$. Für die Daten aus `sim1024smooth` hingegen konvergiert das Maß erst bei $\Delta r \approx 1,75\lambda$.

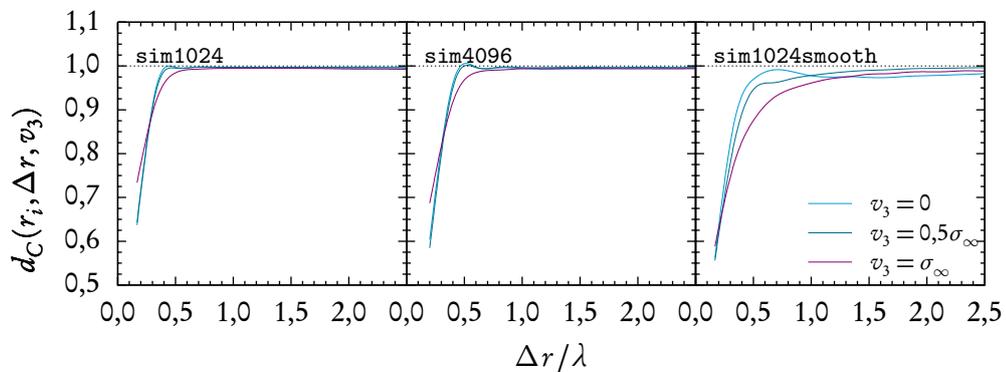


Abbildung 5.12.: Kubische Spline-Interpolation des Korrelationsmaßes für die drei Datensätze. Es werden jeweils verschiedene Schnitte durch $p(v_1, r_1 | v_2, r_2; v_3, r_3)$ bzgl. v_3 gezeigt. Dazu wurde die Mittelung über v_3 (siehe Gl. (5.4)) weggelassen. Für die Simulationsläufe `sim4096` und `sim1024` konvergieren alle Schnitte etwa gleich schnell. Bei `sim1024smooth` hingegen konvergieren die Schnitte umso schneller, je zentraler sie liegen.

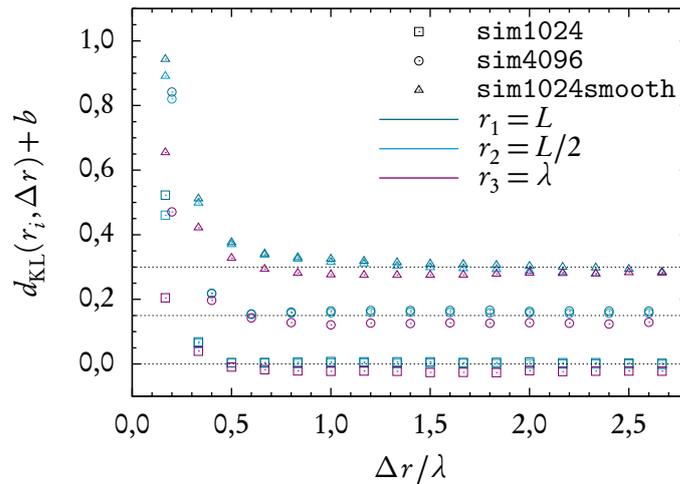


Abbildung 5.13.: Das Kullback-Leibler-Maß $d_{\text{KL}}(r_i, \Delta r)$ für verschiedene Basislängen r_i und alle drei Simulationsläufe. Der Übersichtlichkeit halber wurden die Ergebnisse für die Datensätze sim4096 und sim1024smooth um $b = 0,15$ bzw. $b = 0,3$ nach oben verschoben. Qualitativ ergibt sich das gleiche Bild, wie schon für das Korrelationsmaß in Abbildung 5.11.

Das Kullback-Leibler-Maß wird in Abbildung 5.13 analog zum Korrelationsmaß in Abbildung 5.11 dargestellt. Die Ergebnisse bestätigen das Bild, das sich aus der Betrachtung des Korrelationsmaßes ergeben hat. Für die weiteren Auswertungen werden also folgende Markow-Einstein-Längen festgelegt

$$l_{\text{ME}} = \begin{cases} 0,5\lambda & \text{für sim1024 und sim4096,} \\ 1,75\lambda & \text{für sim1024smooth.} \end{cases}$$

5.4. Kramers-Moyal-Koeffizienten

5.4.1. Beschreibung des Vorgehens

In Gleichung (3.4) wurden die Kramers-Moyal-Koeffizienten als Grenzwerte der bedingten Momente $M^{(n)}(v, r, \Delta r)$ für $\Delta r \rightarrow 0$ definiert. Im vorangegangenen Abschnitt wurde allerdings gezeigt, dass für $\Delta r < l_{\text{ME}}$ die Markow-Bedingung nicht mehr erfüllt ist. In diesem Fall muss der Grenzwert aus den bedingten Momenten $M^{(n)}(v, r, \Delta r)$ für $\Delta r > l_{\text{ME}}$ geschätzt werden. Dabei kann die sogenannte Itô-Taylor-Entwicklung hilfreich sein (siehe Friedrich et al. 2002)

$$M^{(1)}(v, r, \Delta r) = \Delta r D^{(1)}(v, r) + \mathcal{O}[(\Delta r)^2], \quad (5.5)$$

$$M^{(2)}(v, r, \Delta r) = 2\Delta r D^{(2)}(v, r) + \mathcal{O}[(\Delta r)^2]. \quad (5.6)$$

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

Allerdings treten in den Termen zweiter Ordnung bereits Ableitungen von $D^{(1)}(v, r)$ und $D^{(2)}(v, r)$ auf, so dass sich nicht, wie zunächst von Ragwitz und Kantz (2001) vorgeschlagen,⁵ einfache Korrekturterme ergeben.

Hier soll wie folgt vorgegangen werden: Zunächst werden die bedingten Momente $M^{(1)}(v, r, \Delta r)$ numerisch bestimmt. Findet man dann im Bereich $\Delta r > l_{\text{ME}}$ einen guten polynomialen Fit an $M^{(1)}(v, r, \Delta r)/\Delta r$, so ergibt sich der Kramers-Moyal-Koeffizient $D^{(1)}(v, r)$ als y -Achsenabschnitt dieses Fits. Zur Bestimmung des Diffusions-Koeffizienten $D^{(2)}(v, r)$ geht man analog vor. Diese Methode wird auch von Renner (2002) benutzt.

Renner et al. (2001) gehen etwas anders vor. Sie nehmen an, dass die bedingten Momente $M^{(n)}(v, r, \Delta r)$ bei jedem festen $\Delta r > l_{\text{ME}}$ bezüglich v den gleichen funktionalen Verlauf zeigen. Daher legen sie in jedem dieser Schnitte eine Ausgleichskurve an das bedingte Moment, so dass sich Δr -abhängige Fit-Parameter ergeben. Den Verlauf dieser Fit-Parameter extrapolieren Renner et al. dann, um eine Schätzung für die Kramers-Moyal-Koeffizienten $D^{(n)}(v, r)$ zu erhalten. Hier kam diese etwas aufwendigere Methode nicht zum Einsatz, da die Markow-Einstein-Länge l_{ME} genügend klein ist, um auch direkt eine gute Extrapolation zu erlauben.

Für höhere Momente gelten keine Entwicklungen wie (5.5) und (5.6), da in der benutzten Itô-Taylor-Entwicklung explizit die Gültigkeit der Fokker-Planck-Gleichung vorausgesetzt wird. Ist bekannt, dass sich der stochastische Prozess durch eine Fokker-Planck-Gleichung beschreiben lässt, ist eine solche Entwicklung auch nicht nötig, da ohnehin alle Kramers-Moyal-Koeffizienten $D^{(n)}(v, r)$ mit $n > 2$ verschwinden. Hier muss allerdings noch gezeigt werden, dass alle höheren Koeffizienten verschwinden. Dazu wird das bedingte Moment vierter Ordnung $M^{(4)}(v, r, \Delta r)$ berechnet und der zugehörige Kramers-Moyal-Koeffizient $D^{(4)}(v, r)$ nach der oben beschriebenen Vorgehensweise bestimmt. Kann man zeigen, dass dieser verschwindet, so verschwinden nach dem Lemma von Pawula auch alle weiteren Koeffizienten $D^{(n)}(v, r)$ mit $n > 2$.⁶

Bei realen Messdaten, die eine endliche Markow-Einstein-Länge aufweisen, ist allerdings nicht zu erwarten, dass der geschätzte Kramers-Moyal-Koeffizient $D^{(4)}(v, r)$ identisch verschwindet. Das macht eine Abschätzung seines Einflusses notwendig. Direkt $D^{(4)}(v, r)$ mit dem Koeffizienten $D^{(2)}(v, r)$ bzw. dessen Quadrat zu vergleichen, wäre ein erster Zugang. Allerdings lässt dieser Vergleich nur bedingt eine Aussage über den Einfluss von $D^{(4)}(v, r)$ zu. In die Kramers-Moyal-Entwicklung (3.3) gehen nämlich auch Ableitungen der Koeffizienten ein. Eine bessere Möglichkeit eröffnet, wie von Renner et al. (2001) vorgeschlagen und auch von Tutkun und Mydlarski (2004) benutzt, die exakte Gleichung (3.5) für die

⁵Ragwitz und Kantz (2001) hatten zunächst eine Näherung vorgeschlagen, in der diese Ableitungsterme nicht auftreten und wobei in der zweiten Ordnung für $D^{(2)}(v, r)$ nur $(D^{(1)}(v, r))^2$ vorkommt.

⁶Man könnte genausogut einen anderen geraden Kramers-Moyal-Koeffizienten $D^{(n)}(v, r)$ mit $n > 2$ schätzen. Der Koeffizient vierter Ordnung bietet sich an, weil er numerisch am praktischsten zu bestimmen ist.

Strukturfunktionen. Für die Strukturfunktion sechster Ordnung lautet sie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} S_{\ell}^6(r) = & 6 \int_{-\infty}^{\infty} v^5 D^{(1)}(v, r) p(v, r) dv + \underbrace{30 \int_{-\infty}^{\infty} v^4 D^{(2)}(v, r) p(v, r) dv}_{T_2(r)} \\ & + 120 \int_{-\infty}^{\infty} v^3 D^{(3)}(v, r) p(v, r) dv + \underbrace{360 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 D^{(4)}(v, r) p(v, r) dv}_{T_4(r)} + \dots \quad (5.7) \end{aligned}$$

Das Verhältnis der beiden Terme $T_4(r)$ und $T_2(r)$ gibt Aufschluss über den Einfluss des Kramers-Moyal-Koeffizienten vierter Ordnung. Der Leser sei noch darauf hingewiesen, dass nach Gleichung (3.5) der Einfluss höherer Ordnungen der Kramers-Moyal-Koeffizienten zunimmt, je höher die Ordnung der betrachteten Strukturfunktion. Andererseits werden mit zunehmender Ordnung der Strukturfunktion die Schätzung für selbige immer schlechter (siehe Peinke et al. 1993). Die Wahl der sechsten Strukturfunktion stellt hier also eine Art Kompromiss dar.

5.4.2. Auswertung

Die Abbildungen 5.14 bis 5.17 illustrieren die, im vorangegangenen Abschnitt besprochene, Extrapolationsmethode zur Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten. Dabei kamen Fits der folgenden Form zum Einsatz

$$\begin{aligned} f_{\text{linear}}(\Delta r) &= c_0^l(v, r) + c_1^l(v, r) \Delta r, \\ f_{\text{quadr.}}(\Delta r) &= c_0^q(v, r) + c_1^q(v, r) \Delta r + c_2^q(v, r) (\Delta r)^2, \\ f_{\text{kubisch}}(\Delta r) &= c_0^k(v, r) + c_1^k(v, r) \Delta r + c_2^k(v, r) (\Delta r)^2 + c_3^k(v, r) (\Delta r)^3. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich das Bild, dass sowohl der quadratische, als auch der kubische Fit den Verlauf der Quotienten aus bedingtem Moment $M^{(n)}(v, r, \Delta r)$ und Δr gut wiedergeben. Der lineare Fit hingegen liefert nur in Ausnahmefällen eine sinnvolle Interpolation. Zwischen dem quadratischen und dem kubischen Fit entscheidet Ockhams Rasierklinge – im Folgenden werden also nur Kramers-Moyal-Koeffizienten betrachtet, die aus der quadratischen Extrapolation geschätzt wurden.

Auf diese Art und Weise bestimmte Drift- und Diffusionskoeffizienten, $D^{(1)}(v, r)$ bzw. $D^{(2)}(v, r)$, werden in Abbildung 5.19 gezeigt. In Abbildung 5.20 tritt zusätzlich der Kramers-Moyal-Koeffizient vierter Ordnung auf. In allen Fällen, d. h. für alle Simulationen und für alle r , kann der Verlauf von Drift- und Diffusionskoeffizient durch folgende Funktionen angenähert werden

$$\tilde{D}^{(1)}(v, r) = \beta_0(r)v + \beta_1(r)v^3, \quad (5.8)$$

$$\tilde{D}^{(2)}(v, r) = \gamma_0(r) + \gamma_1(r)v^2 + \gamma_2(r)v^3 + \gamma_3(r)v^4. \quad (5.9)$$

Der Verlauf der hier auftretenden Fit-Parameter wird in Abbildung 5.21 dargestellt.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

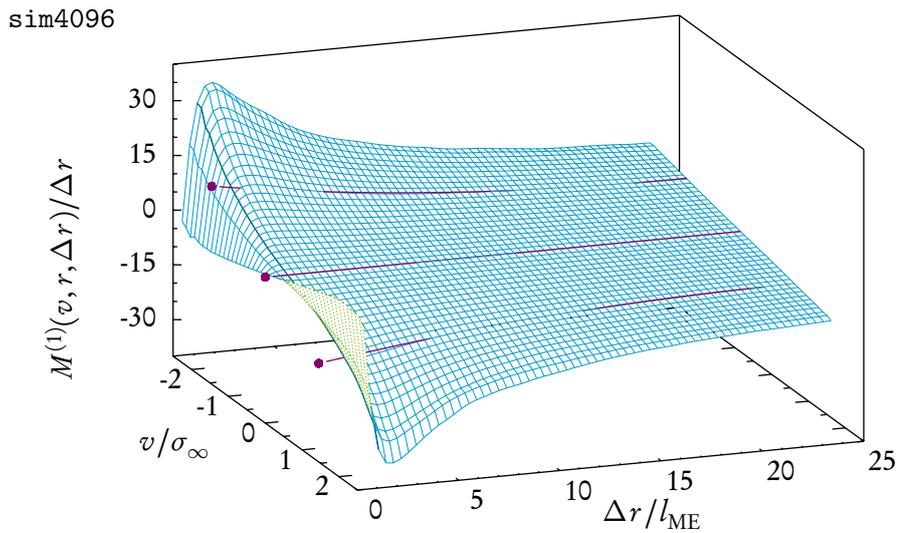


Abbildung 5.14.: Illustration der Extrapolation zur Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten. Die Fläche stellt den Quotienten aus dem ersten bedingten Moment $M^{(1)}(v, r, \Delta r)$ und Δr für $r = 4l_{\text{ME}}$ dar. Die drei parallel zur Δr -Achse verlaufenden Linien sind quadratische Fits an diesen Quotienten bei $v = 0$ und $v = \pm 1,5\sigma_\infty$. Dort, wo man sie nicht sieht, liegen sie unter der Fläche. Die Punkte geben die aus den Fits bestimmten Werte für den Kramers-Moyal-Koeffizienten erster Ordnung $D^{(1)}(v, r)$ an. Schließlich wird noch eine dunkle, parallel zur v -Achse verlaufende Linie gezeigt, die die Lage der Markow-Einstein-Länge l_{ME} angibt.

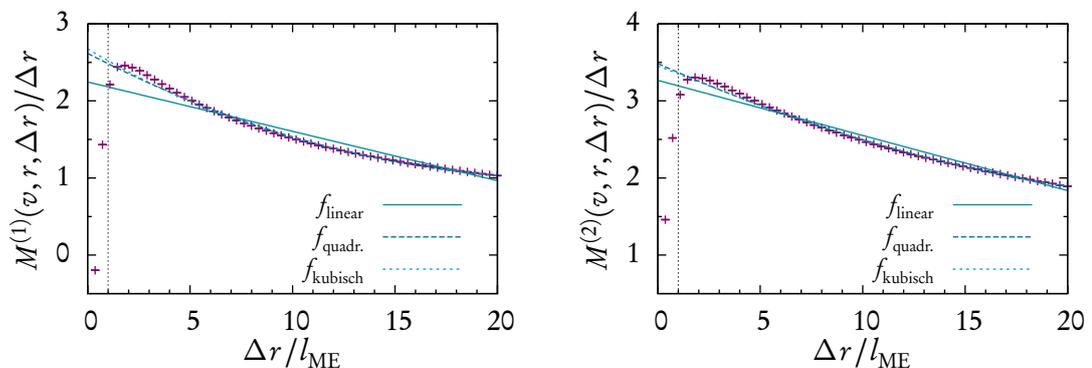


Abbildung 5.15.: Verschiedene Fits an das erste (links) bzw. zweite (rechts) bedingte Moment für $v = -\sigma_\infty$ und $r = 8l_{\text{ME}}$. In beiden Fällen gibt der lineare Fit den Verlauf des Koeffizienten nur ungenügend wieder. Der quadratische und der kubische Fit können in beiden Fällen kaum unterschieden werden – die Diagramme erlauben keine Aussage darüber, welcher den Verlauf besser wiedergibt. (Daten aus sim1024)

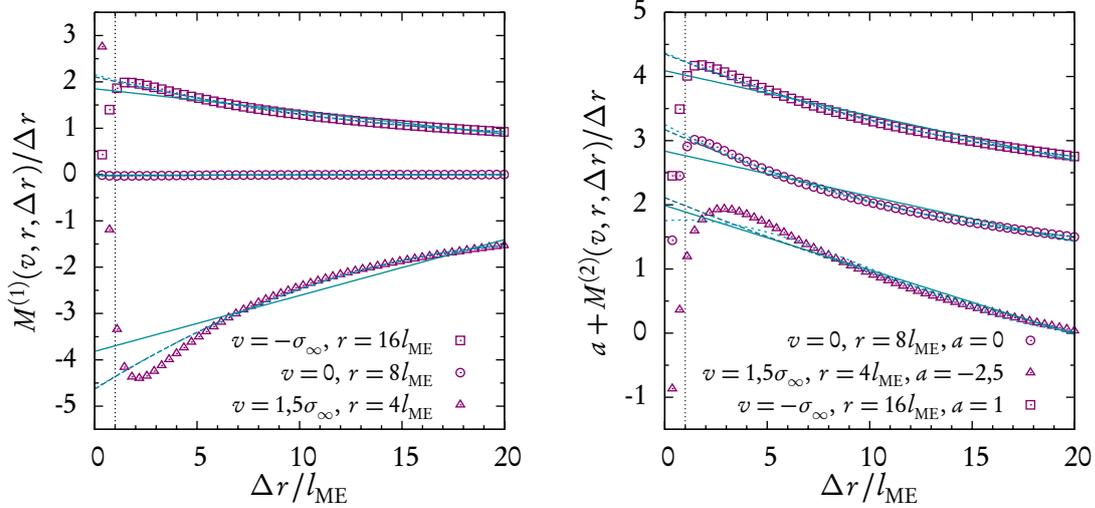


Abbildung 5.16.: Verschiedene Schnitte durch den Quotienten aus erstem (links) bzw. zweitem (rechts) bedingtem Moment und Δr . Für die Fits wurden die Linien wie in Abbildung 5.15 gewählt, die einzelnen Kurven wurden um a gegeneinander verschoben. Wieder versagt der lineare Fit; über die anderen beiden kann nicht abschließend geurteilt werden, beide geben den Verlauf der Kurve gut wieder. (Daten aus sim1024)

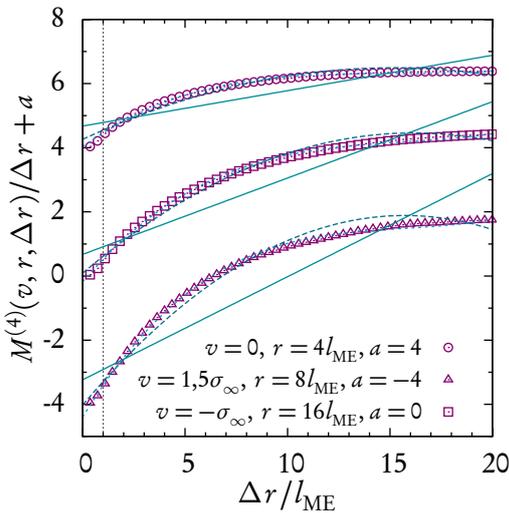


Abbildung 5.17.: Schnitte durch den Quotienten $M^{(4)}(v, r, \Delta r)/\Delta r + a$ für verschiedene Werte von v und r . Die einzelnen Kurven wurden um a gegeneinander verschoben; für die Fits wurden die Linien wie in Abbildung 5.15 gewählt. Auch hier liefern nur der quadratische und der kubische Fit sinnvolle Ergebnisse. Insbesondere erkennt man hier einen qualitativen Unterschied zum Verlauf des ersten bzw. zweiten bedingten Moments (z. B. Abb. 5.16): Die Steigung ist überall positiv – es gibt keinen *Knick*. (Daten aus sim1024)

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

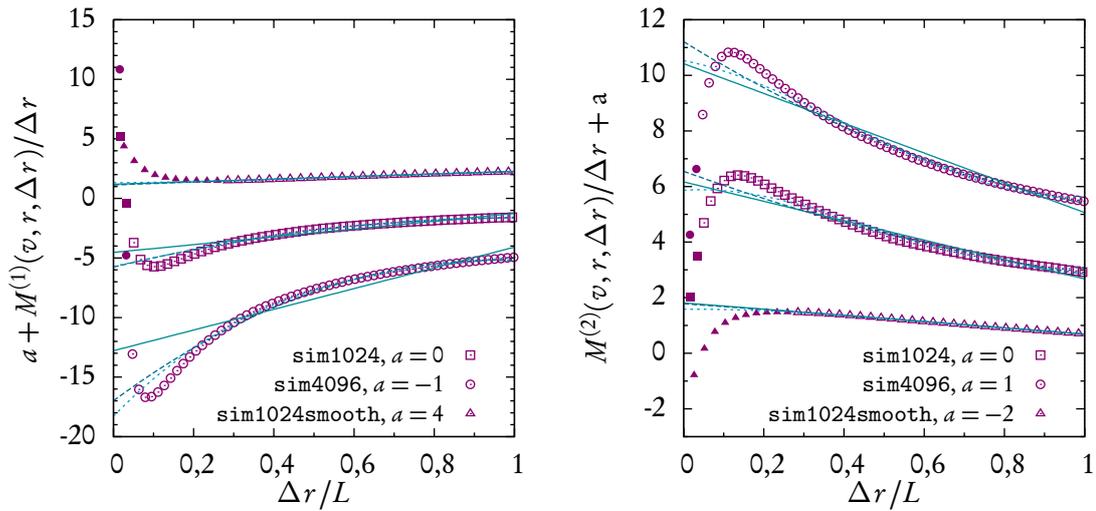


Abbildung 5.18.: Extrapolation des Quotienten aus erstem (links) bzw. zweitem (rechts) bedingten Moment und Δr zur Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten. Hier wird jeweils ein Schnitt bei $v = 1,5\sigma_\infty$ und $r = 3l_{\text{ME}}$ für die drei benutzten Datensätze gezeigt. Um vergleichbare Werte zu erhalten, wurde hier, anders als in den übrigen Abbildungen, der Abstand Δr mit der integralen Länge L skaliert. Die einzelnen Kurven wurden der Übersichtlichkeit halber senkrecht gegeneinander um a verschoben. Die Werte, die nicht in die Fits einfließen, d. h. für die gilt $\Delta r < l_{\text{ME}}$, werden durch gefüllte Symbole gekennzeichnet, die anderen durch offene. Für die Fits wurden die Linien wie in Abbildung 5.15 gewählt.

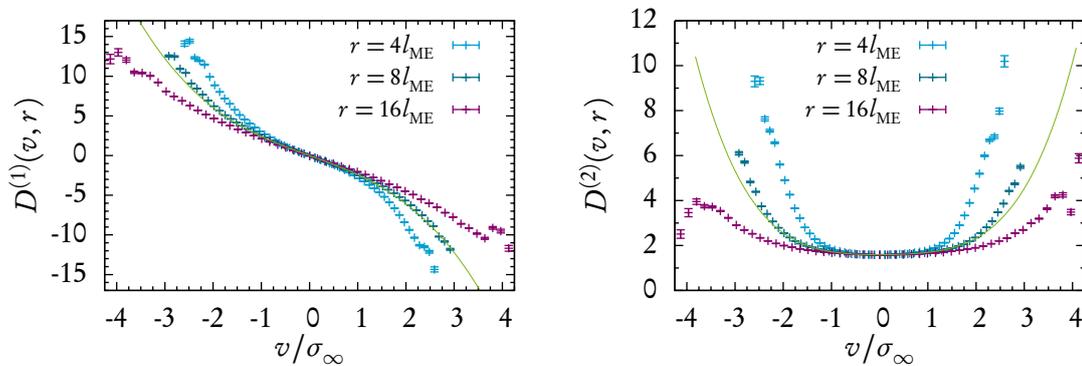


Abbildung 5.19.: Drift- (links) und Diffusionskoeffizient (rechts) für die Simulation `sim1024` bestimmt aus der quadratischen Extrapolation. Die gezeigten Fehlerbalken ergeben sich aus der (Un-)Sicherheit mit der der Fit an den Quotienten $M^{(1/2)}(v, r, \Delta r)/\Delta r$ bestimmt werden konnte. Die durchgezogenen Linien zeigen einen Fit der Form (5.8) bzw. (5.9) für $r = 8l_{\text{ME}}$.

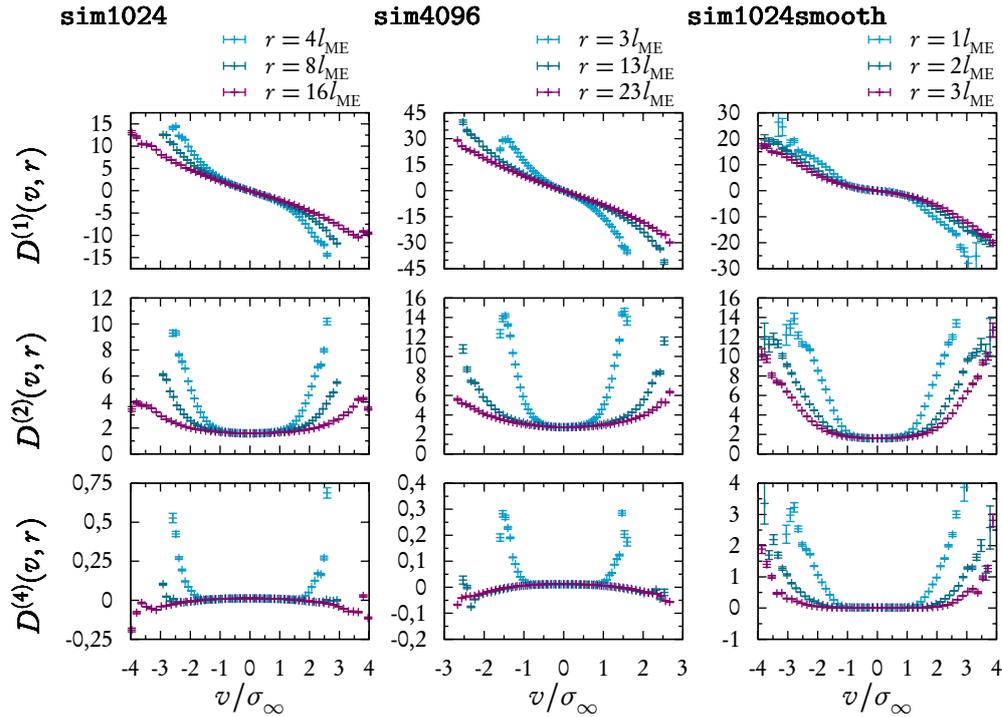


Abbildung 5.20.: Drift-, Diffusionskoeffizient und Kramers-Moyal-Koeffizient vierter Ordnung für die drei benutzten Simulationsläufe. In allen Simulationen zeigen die Koeffizienten den gleichen Verlauf. Auffällig ist, dass der Koeffizient vierter Ordnung $D^{(4)}(v, r)$ bei der Simulation **sim1024smooth** vergleichsweise größere Werte annimmt.

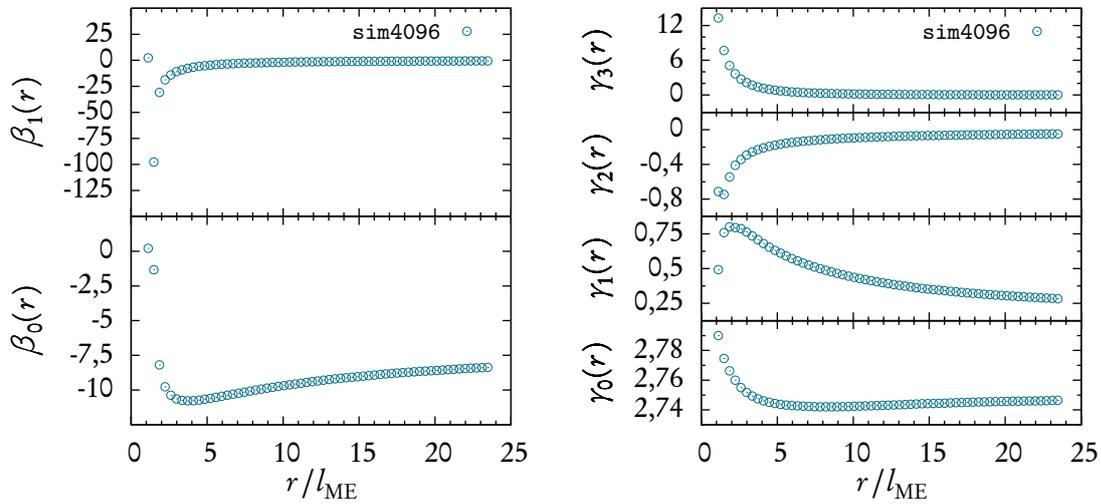


Abbildung 5.21.: Parameter zu den Fits (5.8) (links) und (5.9) (rechts) für den Simulationslauf **sim4096**, für die anderen Datensätze ergibt sich qualitativ das gleiche Bild. Mit wachsendem r nimmt der Einfluss höherer Ordnungen in den Fits ab; einige Parameter scheinen gegen null zu konvergieren.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

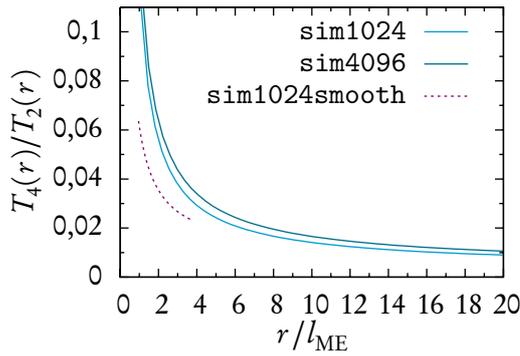


Abbildung 5.22.: Vergleich der Terme $T_2(r)$ und $T_4(r)$. Das Verhältnis $T_4(r)/T_2(r)$ liegt maximal bei ca. 10% und fällt schnell mit r auf Werte um 1%. Eine Ausnahme stellt hier der Datensatz `sim1024smooth` dar, bei dem der untersuchte Inertialbereich scheinbar zu klein im Vergleich zur Markow-Einstein-Länge ist.

Um den Einsatz einer Fokker-Planck-Gleichung zu rechtfertigen, bleibt noch zu zeigen, dass die Kramers-Moyal-Koeffizienten höherer Ordnung keinen Einfluss haben. Dazu werden in Abbildung 5.22 die Terme $T_4(r)$ und $T_2(r)$ verglichen (vgl. Gl. (5.7)). Der Quotient $T_4(r)/T_2(r)$ liegt höchstens bei 0,1 und fällt rapide mit r . Der Einfluss des Kramers-Moyal-Koeffizienten vierter Ordnung $D^{(4)}(v, r)$ kann also als gering angesehen werden und, mit dem Lemma von Pawula, die Kramers-Moyal-Entwicklung nach dem zweiten Glied abgebrochen werden, so dass sich eine Fokker-Planck-Gleichung ergibt.

Als eine Art Selbstkonsistenztest werden in Abbildung 5.23 schließlich noch die nach Gleichung (3.5) rekonstruierten longitudinalen Strukturfunktionen zweiter und sechster Ordnung gezeigt. In die Rekonstruktion der Strukturfunktion zweiter Ordnung $S_\ell^{(2)}(r)$ fließen nur der Drift- und der Diffusionskoeffizient, $D^{(1)}(v, r)$ bzw. $D^{(2)}(v, r)$, ein. Hat man die beiden letzteren gut geschätzt, müssten die Rekonstruktion und die direkt bestimmte Strukturfunktion zusammenfallen – Abbildung 5.23 bestätigt diese Erwartung. Die exakte Rekonstruktion der longitudinalen Strukturfunktion sechster Ordnung $S_\ell^{(6)}(r)$ (siehe Gl. (5.7)) erfordert die ersten sechs Kramers-Moyal-Koeffizienten. Für die in Abbildung 5.23 gezeigte Rekonstruktion wurden aber nur Drift- und Diffusionskoeffizient benutzt. Die dennoch vergleichsweise gute Übereinstimmung ist ein weiterer Hinweis darauf, dass der Einfluss höherer Kramers-Moyal-Koeffizienten vernachlässigt werden kann. Die erkennbaren Abweichungen treten verstärkt bei kleinem r auf. Dies liest man an Abbildung 5.23 ab, wenn man berücksichtigt, dass die dort gezeigten Strukturfunktionen nach Gleichung (3.5) *hoch*integriert wurden. Die Abweichungen treten bei kleinen r auf und verstärken sich danach nicht mehr. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit dem Ergebnis aus Abbildung 5.22, wonach der Einfluss höherer Koeffizienten mit steigendem r nachlässt.

5.5. Fokker-Planck-Gleichung

Im vorangegangenen Abschnitt konnten stichhaltige Hinweise geliefert werden, dass die Koeffizienten $D^{(n)}(v, r)$ mit $n > 2$ in der Kramers-Moyal-Entwicklung nur eine untergeordnete Rolle spielen. Diese Tatsache rechtfertigt die Entwicklung der Geschwindigkeitsinkremente $v(r)$ in der Skala r durch eine Fokker-Planck-Gleichung zu beschreiben. Allerdings weisen Drift- $D^{(1)}(v, r)$ und Diffusionskoeffizient $D^{(2)}(v, r)$ eine relativ kompli-

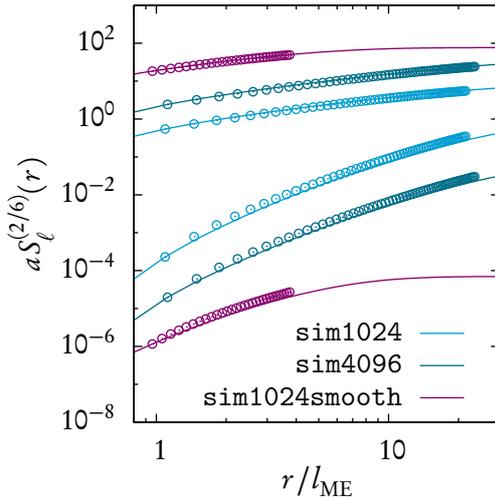


Abbildung 5.23.: Rekonstruierte longitudinale Strukturfunktionen zweiter (oben) und sechster (unten) Ordnung, willkürlich gegeneinander verschoben. Die durchgezogenen Linien zeigen die direkt aus den numerischen Datensätzen ermittelten Strukturfunktionen, die Punkte zeigen die Rekonstruktion durch Gleichung (3.5), in die nur der Drift- und der Diffusionskoeffizient $D^{(1/2)}(v, r)$ eingeflossen sind.

zierte funktionale Form auf. Außerdem sind sie explizit r -abhängig und der Prozess damit, wie zu erwarten, nichtstationär in der Skala.⁷ Eine Lösung der Fokker-Planck-Gleichung ist unter diesen Voraussetzungen nur numerisch zu bestimmen. Andererseits zeigen die Untersuchungen, dass höhere Ordnungen nur einen verhältnismäßig geringen Beitrag zu Drift und Diffusion liefern (vgl. Abb. 5.21). Diese Tatsache führt auf folgende einfachste Näherung

$$D^{(1)}(v, r) = \beta_0(r)v, \quad D^{(2)}(v, r) = \gamma_0(r).$$

Berücksichtigt man nun noch, dass die beiden Fit-Parameter $\beta_0(r)$ und $\gamma_0(r)$ nur schwach in r variieren, d. h. in erster Näherung als konstant angesehen werden können⁸, so führen diese Überlegungen auf einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (Uhlenbeck und Ornstein 1930). Die Lösungen der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung können analytisch berechnet werden. Sie lauten für die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten (siehe Risken 1996, S. 100)

$$p(v, r | v', r') = \left(\frac{-\beta_0(r)}{2\pi\gamma_0(r)[1 - e^{2\beta_0(r)\Delta r}]} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{\beta_0(r)[v - v'e^{\beta_0(r)\Delta r}]^2}{2\gamma_0(r)[1 - e^{2\beta_0(r)\Delta r}]} \right\}, \quad (5.10)$$

wobei $\Delta r = r - r'$ gesetzt wurde. Es handelt sich also bei festem $v'(r')$ um Gauß-Verteilungen.

Abbildung 5.24 zeigt eine nach Gleichung (5.10) berechnete cpdf im Vergleich mit einer aus den Daten bestimmten. Gemessen an den recht starken Näherungen, die zu Gleichung (5.10) geführt haben, ergibt sich eine bemerkenswert gute Übereinstimmung. Natürlich können die Gauß-Verteilungen, die sich aus dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ergeben, nicht die durch das Kolmogorovsche 3/2-Gesetz geforderte Schiefe (siehe Abschnitt 2.7) wiedergeben. Dies kann man auch an den Schnitten durch die bedingten pdfs

⁷Die Nichtstationarität lässt sich an Kolmogorovs exaktem Ergebnis für die dritte Strukturfunktion ablesen. Letztere ist nichts anderes als das dritte Moment der Inkrementverteilung und Gleichung (2.12) besagt nun, dass dieses sich linear mit r verändert.

⁸Wie Abbildung 5.21 zeigt, gilt diese Näherung erst nach einer gewissen "Einschwingphase" von ca. $5/l_{ME}$.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

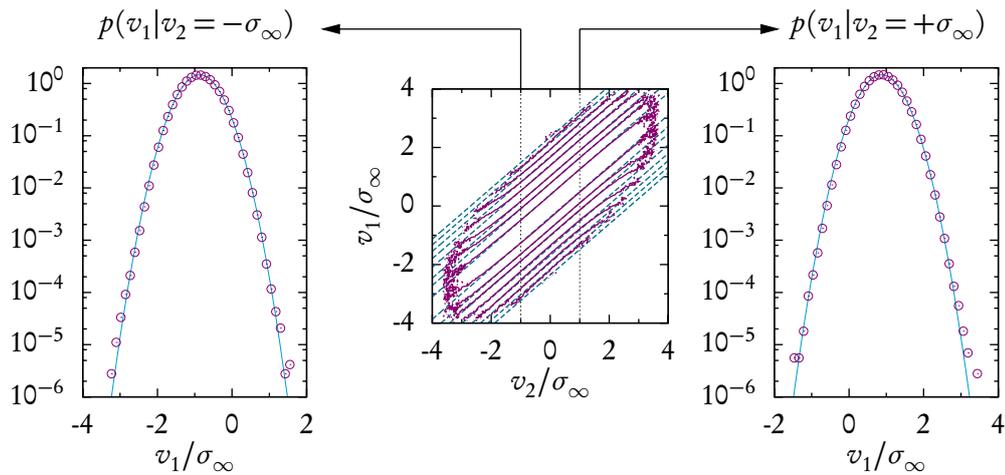


Abbildung 5.24.: Vergleich der empirisch bestimmten bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v_1, L/2 + 2\lambda|v_2, L/2)$ mit der zugehörigen bedingten pdf nach der Näherung aus Gleichung (5.10). Die aus der Näherungsformel berechnete cpdf wird im Höhenliniendiagramm in der Mitte durch durchbrochene Linien gekennzeichnet; in den beiden Schnitten bei $\pm\sigma_\infty$ außen, wird sie jeweils durch die durchgezogene Linie repräsentiert. (Daten aus sim4096)

in Abbildung 5.24 erkennen; dort ist die Übereinstimmung auf einer Seite minimal besser. Aber von diesen leichten Abweichungen abgesehen, werden sowohl die Korrelation der beiden Inkremente als auch die Varianz der Verteilung reproduziert.

5.6. Diskussion

In der vorliegenden Arbeit konnte erstmals die Gültigkeit der Markow-Bedingung für Geschwindigkeitsinkremente in zweidimensionaler Turbulenz nachgewiesen werden. Dieses Ergebnis erweitert somit bereits bekannte Ergebnisse für dreidimensionale Strömungen (siehe z. B. Friedrich und Peinke 1997a; Renner et al. 2001) auf ein weiteres turbulentes System. Gerade im Hinblick auf die großen Unterschiede zwischen beiden Systemen, wie z. B. den inversen Energiefluss in zwei Dimensionen, bietet dieses Resultat interessante Einblicke in die statistischen Eigenschaften turbulenter Strömungen. Insbesondere wurden auch im zweidimensionalen Fall Markow-Einstein-Längen im Bereich der Taylor-Länge gefunden. Allerdings steht die Überprüfung einer etwaigen funktionalen Abhängigkeit der Markow-Einstein-Länge von der Taylor-Länge, wie in drei Dimensionen von Lück et al. (2006) untersucht, noch aus.

Bei tiefergehender Betrachtung zeigt sich, dass das genaue Verhältnis zwischen Markow-Einstein-Länge und Taylor-Länge mit der Wahl der Simulationsparameter schwankt. Es wäre also interessant herauszufinden, wie die Einflussnahme der Simulationsparameter im Detail aussieht. Die so gewonnenen Erkenntnisse könnten zur Klärung des Ursprungs

der Markow-Eigenschaft, bzw. ihrer Nichtgültigkeit auf kleinen Skalen, beitragen.⁹ Hier konnte gezeigt werden, dass sich bei Wahl einer größeren Korrelationslänge für das Forcing eine größere Markow-Einstein-Länge ergibt (siehe Simulation `sim1024smooth`). Durch die größere Korrelationslänge werden größere kohärente Strukturen im Forcing-Feld erzeugt. Diese beeinflussen die Taylor-Länge scheinbar nicht, bewirken aber eventuell das Zusammenbrechen der Markow-Eigenschaft. Andererseits wurden für den Simulationslauf `sim1024smooth` im Vergleich zum Lauf `sim1024` auch andere Simulationsparameter, wie die Viskosität und die Reibung, verändert. Insbesondere die Viskosität, aber auch eine lineare Reibung, wirken sich auf die kleinen Skalen aus, so dass auch sie mit dem Zusammenbrechen der Markow-Eigenschaft in Verbindung gebracht werden könnten.

Basierend auf der Gültigkeit der Markow-Bedingung wurden die Kramers-Moyal-Koeffizienten geschätzt. Wie in drei Dimensionen (vgl. Renner et al. 2001) zeigen Drift- und Diffusionskoeffizient, $D^{(1)}(v, r)$ bzw. $D^{(2)}(v, r)$ in erster Näherung lineares, respektive konstantes, Verhalten. Bei genauerer Betrachtung stellt man allerdings fest, dass der konstante Bereich beim Diffusionskoeffizienten $D^{(2)}(v, r)$ im hier behandelten zweidimensionalen Fall wesentlich ausgeprägter ist. Außerdem treten Asymmetrien weniger stark zutage. Diese Tatsache kann damit in Verbindung gebracht werden, dass die Inkrementverteilungen in zweidimensionaler Turbulenz (siehe Abb. 5.4) annähernd gaußisch sind, während sie in dreidimensionaler Turbulenz starke Flügel zeigen. Die weniger ausgeprägte Asymmetrie lässt sich durch die Ineffizienz der inversen Energiekaskade (siehe Siggia und Aref 1981) erklären, die in zwei Dimensionen nur minimal asymmetrische Inkrementverteilungen zulässt.

Weiterhin wurden überzeugende Hinweise geliefert, dass der Kramers-Moyal-Koeffizient vierter Ordnung und, nach Pawulas Lemma (Abschnitt 3.3.2), damit alle Koeffizienten $D^{(n)}(v, r)$ mit $n \geq 3$ verschwinden. Dies führt auf eine Fokker-Planck-Beschreibung der bedingten pdfs der Geschwindigkeitsinkremente. Es wurde gezeigt, wie mittels dieser Beschreibung höhere Strukturfunktionen ausschließlich aus dem Drift- und dem Diffusionskoeffizienten berechnet werden können.

Auf den Schätzungen für Drift- und Diffusionskoeffizienten basierend konnten Näherungen vorgeschlagen werden, die auf ein einfaches Modell führen. Dieses Modell erlaubt die exakte Lösung der Fokker-Planck-Gleichung. Damit rekonstruierte bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten geben die grundlegenden Merkmale der direkt bestimmten bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten wieder, lediglich einige weniger ausgeprägte Eigenschaften, wie die Asymmetrie der Wahrscheinlichkeitsdichten, werden nicht reproduziert.

Die in dieser Arbeit präsentierte Schätzung der Kramers-Moyal-Koeffizienten ist mit einem relativ großen Fehler behaftet, da sie mittels eines verhältnismäßig einfachen Verfahrens gewonnen wurde. Es existieren verschiedene Optimierungsverfahren für diese Schätzung (einen aktuellen Überblick liefern Gottschall und Peinke 2008), die sich jedoch üblicherweise auf stationäre Prozesse beziehen, in denen Drift $D^{(1)}(v, r)$ und Diffusion $D^{(2)}(v, r)$ nicht explizit von der Skala r abhängen. Daher konnten diese Optimierungsverfahren hier nicht zum Einsatz kommen. Als interessant könnte sich die Entwicklung und

⁹Einen anderen Ansatz zur Klärung dieser Frage, könnte die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie (siehe Kapitel 7) liefern.

5. Markow-Analyse der inversen Energiekaskade

Anwendung eines entsprechend angepassten Verfahrens erweisen.

Einen weiteren Ansatzpunkt für tiefergehende Untersuchungen, stellt die Definition der Inkremente dar. In der vorliegenden Arbeit kommt ausschließlich die sogenannte *linksbündige* Definition der Inkremente (siehe Gl. (2.9)) zum Einsatz. Prinzipiell sind aber auch andere Definitionen, insbesondere eine zentrierte, denkbar. Waechter et al. (2004) argumentieren, dass sich die Nutzung linksbündiger Inkremente unter bestimmten Umständen negativ auf die Markow-Eigenschaft auswirken kann. Hier konnte die Markow-Eigenschaft auch für linksbündige Inkremente nachgewiesen werden. Dennoch kann die Nutzung zentrierter Inkremente, wie z. B. von Siefert und Peinke (2006) gezeigt, zu subtilen Unterschieden führen, und eventuell wäre eine detaillierte Untersuchung auch für die vorliegenden Daten aufschlussreich.

Summa summarum konnte im vorliegenden Teil der Arbeit die Markow-Eigenschaft für Geschwindigkeitsinkremente in zweidimensionaler Turbulenz gezeigt werden. Die Gültigkeit der Markow-Eigenschaft sowohl in zwei, als auch in drei Dimensionen gibt Anlass, sie als universelles Merkmal turbulenter Strömungen zu sehen.

6. Grundzüge eines Schließungsansatzes für die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

6.1. Vortizitätsinkremente

In Kapitel 4 wurde folgende Entwicklungsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Vortizitätsinkremente $\varpi(r, t)$ in zweidimensionalen Strömungen hergeleitet

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} p(\Pi; r, t)}_{(6.1.a)} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v_\ell(r, t) | \Pi \rangle}_{(6.1.b)} p(\Pi; r, t) \\
 &= \underbrace{\gamma \frac{\partial}{\partial \Pi} \Pi p(\Pi; r, t)}_{(6.1.c)} + \underbrace{2 \frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} Q^{12}(r) p(\Pi; r, t)}_{(6.1.d)} \\
 &+ \underbrace{2\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} p(\Pi; r, t)}_{(6.1.e)} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \Pi^2} \left\langle 2\nu \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] | \Pi \right\rangle}_{(6.1.f)} p(\Pi; r, t). \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Nimmt man Stationarität an, verschwindet der Term (6.1.a) und obige Gleichung beschreibt, ähnlich wie die Fokker-Planck-Gleichung im vorigen Kapitel, die Entwicklung von Inkrementen in der Skala. Hier handelt es sich allerdings um Vortizitäts- und nicht wie im vorangegangenen Kapitel um Geschwindigkeitsinkremente. Gleichung (6.1) ist aufgrund der auftretenden bedingten Mittelwerte nicht geschlossen. Hier sollen nun die ersten Schritte in Richtung einer möglichen Schließung obiger Gleichung präsentiert werden. Dazu werden in Abschnitt 6.1.2 die einzelnen Terme analysiert. Zunächst macht man sich allerdings in Abschnitt 6.1.1 einen Eindruck von den untersuchten Vortizitätsinkrementwahrscheinlichkeitsdichten.

6.1.1. Wahrscheinlichkeitsdichten der Vortizitätsinkremente

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\Pi; r, t)$ wurde numerisch aus dem in Abschnitt 5.1 vorgestellten Datensatz `sim1024` berechnet. Abbildung 6.1 zeigt diese Wahrscheinlichkeitsdichte sowohl normiert als auch unnormiert. Für eine konsistente Darstellung wurde hier, analog zum letzten Kapitel, die Größe

$$\sigma_\infty^\varpi = \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \varpi(r)^2 \rangle \right]^{1/2} = \sqrt{2} \omega_{\text{rms}} \quad (6.2)$$

6. Schließungsansatz für die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

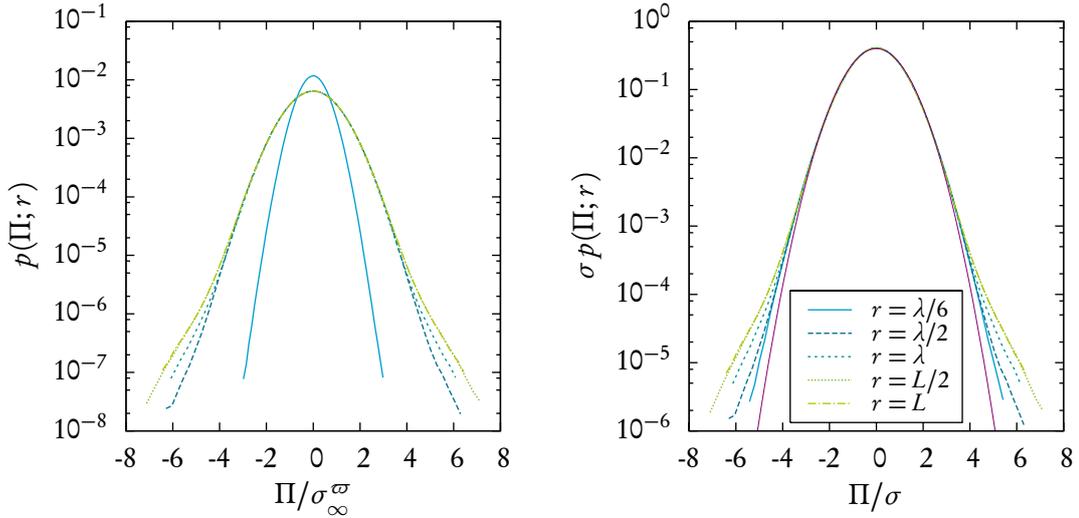


Abbildung 6.1.: Wahrscheinlichkeitsdichten der Vortizitätsinkremente $\varpi(r)$. Links einfach, rechts mit der jeweiligen Standardabweichung σ normiert. Rechts wird zusätzlich eine Normalverteilung gezeigt (innerste Kurve). Der Kasten mit den Angaben der Abstände r gilt für beide Diagramme.

definiert.

Bei den Wahrscheinlichkeitsdichten erkennt man, dass es sich, zumindest im zentralen Bereich, annähernd um Gauß-Verteilungen handelt, die ab einem gewissen Abstand r ihre Form kaum noch ändern. Gauß-Verteilungen sind aufgrund ihrer mathematischen Struktur analytisch gut handhabbar. Daher nährt dieses Ergebnis die Hoffnung, plausible Näherungen zu finden, die Gleichung (6.1) in eine geschlossene Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\Pi; r, t)$ überführen. Durch Betrachtung der einzelnen Terme aus Gleichung (6.1) soll im folgenden Abschnitt ein möglicher Ansatzpunkt für eine solche Schließung ausgemacht werden.

6.1.2. Besprechung der einzelnen Terme

Linke Seite

Zuerst sollen die Terme auf der linken Seite der Gleichung (6.1) betrachtet werden. Im Falle stationärer Turbulenz, der hier angenommen sei, fällt, wie bereits erwähnt, die Zeitableitung (6.1.a) weg und es bleibt nur der Term (6.1.b) zu untersuchen. Dazu wurde der bedingte Mittelwert $\langle v_\ell(r) | \Pi \rangle$ anhand der Daten aus dem Simulationslauf `sim1024` numerisch bestimmt, das Ergebnis wird in Abbildung 6.2 dargestellt. Für alle Abstände r gibt ein Fit der Form

$$\langle v_\ell(r) | \Pi \rangle = \beta_0(r) + \beta_1(r)\Pi^2 + \beta_2(r)\Pi^4, \quad (6.3)$$

den Verlauf der Kurven gut wieder.

Um die r -Abhängigkeit besser zu kennzeichnen, wird in Abbildung 6.3 der Verlauf der Fit-Parameter gezeigt. Man erkennt, dass sich die "Dynamik" in erster Linie bei kleinen

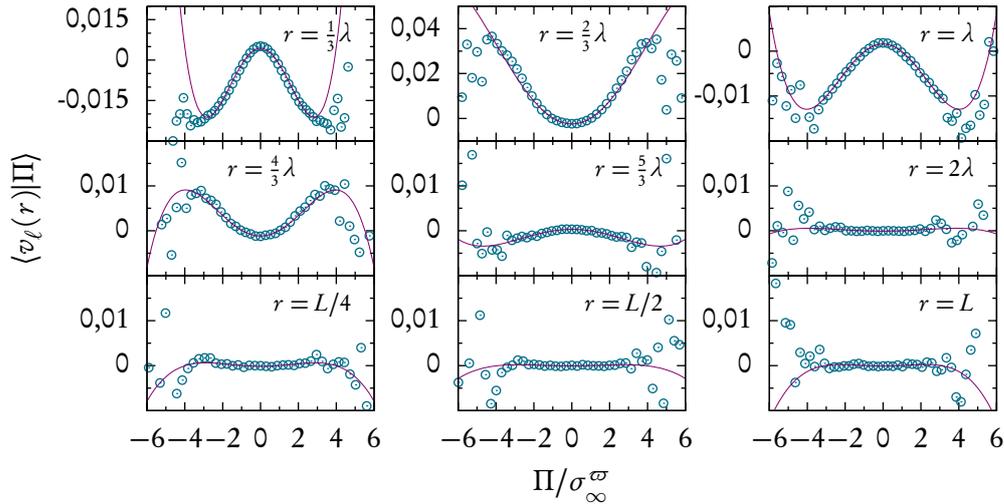


Abbildung 6.2.: Hier wird der bedingte Mittelwert aus Term (6.1.b) für verschiedene Abstände r gezeigt. Die durchgezogenen Linien sind Fits nach Gleichung (6.3).

r abspielt, für größere r ändern sich die Form des bedingten Mittelwerts und damit die Fit-Parameter kaum noch.

Rechte Seite

Die Terme (6.1.c) und (6.1.e) sind analytisch zu behandeln und können daher hintenangestellt werden. Das $Q^{12}(r)$, das in Term (6.1.d) auftritt, ist vollständig durch die räumliche Korrelationsfunktion der treibenden Kraft bestimmt. In numerischen Simulationen zweidimensionaler getriebener Turbulenz ist diese üblicherweise bekannt (vgl. Abschnitt 5.1) und damit auch Term (6.1.d) analytisch zu behandeln.

Der übriggebliebene Term (6.1.f) ist nicht analytisch handzuhaben, daher wurde der dort auftretende bedingte Mittelwert zunächst numerisch bestimmt (siehe Abbildung 6.4). Man erkennt in der Mitte einen ausgeprägten näherungsweise konstanten Bereich und einen Anstieg in den Außenbereichen. Diesem Term kommt, von der Struktur der Gleichung (6.1) her, eine ähnliche Bedeutung zu, wie dem Diffusionsterm im vorangegangenen Kapitel. Insbesondere konnte dort (Abschnitt 5.4.2) gezeigt werden, dass auch der Diffusionsterm einen zentralen annähernd konstanten Bereich zeigt. Indem letzterer durch eine Konstante genähert wurde, konnten gaußsche Lösungen gefunden werden. Auch hier können die Außenbereiche als Ursache für nichtgaußsches Verhalten, d. h. die Abweichungen, die in den Flügeln der pdfs in Abbildung 6.1 auftreten, gedeutet werden. Allerdings hat der Term (6.1.f), im Vergleich zum Diffusionsterm aus dem vorherigen Kapitel, umgekehrtes Vorzeichen. Hier wird die Annahme

$$Q^{12}(r) - \left\langle 2\nu \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] \left[\frac{\partial \varpi}{\partial r_i} \right] \middle| \Pi \right\rangle > 0,$$

gemacht, so dass sich insgesamt eine positive Diffusion ergibt. Eine weitere Eigenschaft,

6. Schließungsansatz für die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

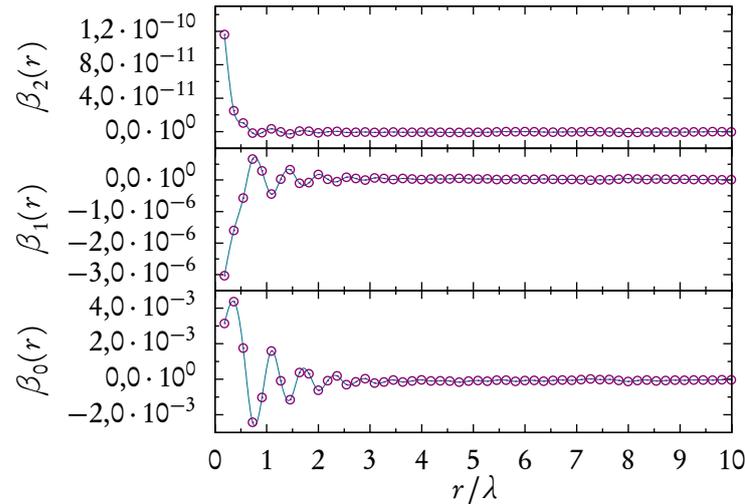


Abbildung 6.3.: Hier werden die Parameter, die sich aus den Fits nach Gleichung (6.3) ergeben, dargestellt. Zusätzlich wird, zur besseren Orientierung, eine Interpolation dieser Werte durch kubische Splines gezeigt.

die der untersuchte bedingte Mittelwert mit dem Diffusionskoeffizienten aus dem vorigen Kapitel teilt, ist seine schwache r -Abhängigkeit – außer bei sehr kleinen Abständen, ändert er sich kaum mit dem Abstand r .

6.1.3. Zwischenresümee

Im Lichte der hier präsentierten Ergebnisse zu den einzelnen Termen der Gleichung (6.1) erscheinen die bedingten Geschwindigkeitsinkremente als vielversprechender Ansatzpunkt für eine mögliche Schließung. Gelingt hier eine Modellierung kann die Entwicklung der Vortizitätsinkrement-pdfs in der Skala, zunächst unter Vernachlässigung oder unter Annahme der Konstanz des Terms (6.1.f), analytisch behandelt werden. Eine detailliertere Besprechung der Ergebnisse wird in Abschnitt 6.3 erfolgen.

6.2. Bedingte mittlere Geschwindigkeitsfelder

6.2.1. Bedingt auf die Vortizität an zwei Orten

Dieser Abschnitt ist der Entwicklungsgleichung für die Zweipunktverteilungen der Vortizität, Gleichung (4.12), gewidmet. Allerdings soll hier nur ein kleiner Ausschnitt beleuchtet werden. Nachdem im vorangegangenen Abschnitt gerade die bedingten Geschwindigkeitsinkremente interessant erschienen, betrachtet man hier die bedingten Geschwindigkeitsfelder

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \Omega_1, \Omega_2 \rangle,$$

wobei das $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in obigem Ausdruck als die Geschwindigkeit an einem beliebigen Ort \mathbf{x} zu verstehen ist. Setzt man $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ bzw. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$, erhält man die bedingten Mittelwerte, wie sie

6.2. Bedingte mittlere Geschwindigkeitsfelder

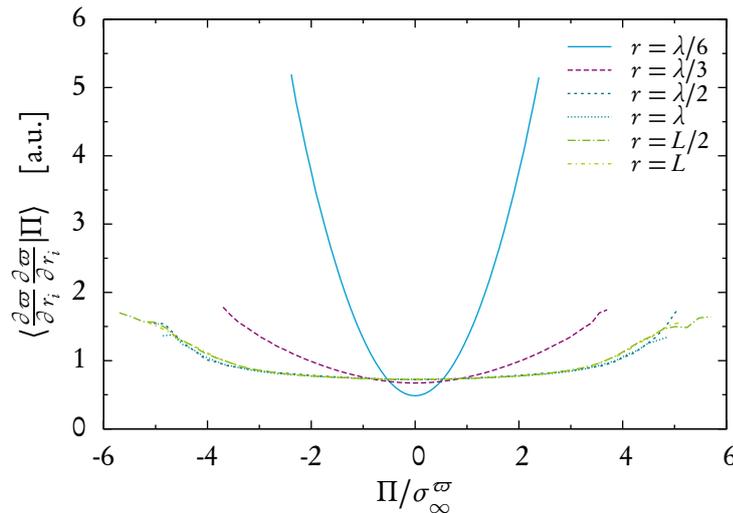


Abbildung 6.4.: Hier wird der bedingte Mittelwert, der in Term (6.1.f) auftritt gezeigt. Da man sich zunächst nur für die Form interessiert ist er auf der y -Achse nur in willkürlichen Einheiten aufgetragen.

in Gleichung (4.12) eingehen. Durch Betrachtung der vollen bedingten Geschwindigkeitsfelder erhofft man sich Hinweise auf eine mögliche Modellierung.

Die Bestimmung dieser Geschwindigkeitsfelder erfordert, ähnlich wie die Bestimmung der mehrfach bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten (siehe Abschnitt 5.2), eine große Datenmenge. Um dennoch aussagekräftige Resultate zu erlangen, wurde das Intervall $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$, wobei ω_{max} den größten gemessenen Vortizitätsbetrag bezeichnet, in nur fünf Klassen unterteilt. In Abbildung 6.5 und 6.6 werden auf diese Weise gewonnene Felder gezeigt. Dabei ist “positive Vortizität” so zu verstehen, dass $\Omega \in [\frac{1}{5}\omega_{max}, \frac{3}{5}\omega_{max}]$ gilt, und entsprechend “negative Vortizität” so, dass $\Omega \in [-\frac{3}{5}\omega_{max}, -\frac{1}{5}\omega_{max}]$ gilt. Interessanterweise zeigen die Felder eine relativ einfache, an Punktwirbel erinnernde Struktur. Dass eine verhältnismäßig komplexe Größe, wie das Geschwindigkeitsfeld bedingt auf die Vortizität an zwei Punkten, eine derart einfache Form aufweist, war nicht von vornherein zu erwarten.

6.2.2. Bedingt auf die Vortizität an drei Orten

Aufgrund der interessanten Struktur der zweifach bedingten Geschwindigkeitsfelder, schaut man sich nun auch auf drei “Wirbel” bedingte Geschwindigkeitsfelder $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ an. Diese Felder sind mit der Entwicklungsgleichung der Dreipunkt Wahrscheinlichkeitsdichte für die Vortizität verknüpft, die hier nicht angegeben wird. Dort treten entsprechend der Zweipunkt Wahrscheinlichkeitsdichte bedingte mittlere Geschwindigkeiten an den Orten der drei Vortizitäten auf. Man erhält sie aus der hier untersuchten Größe, indem man $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ bzw. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_3$ setzt.

Das mittlere bedingte Geschwindigkeitsfeld $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$ wurde, wie im vorigen Abschnitt, aus dem Datensatz sim1024 für verschiedene Konfigurationen der Vortizitäten

6. Schließungsansatz für die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

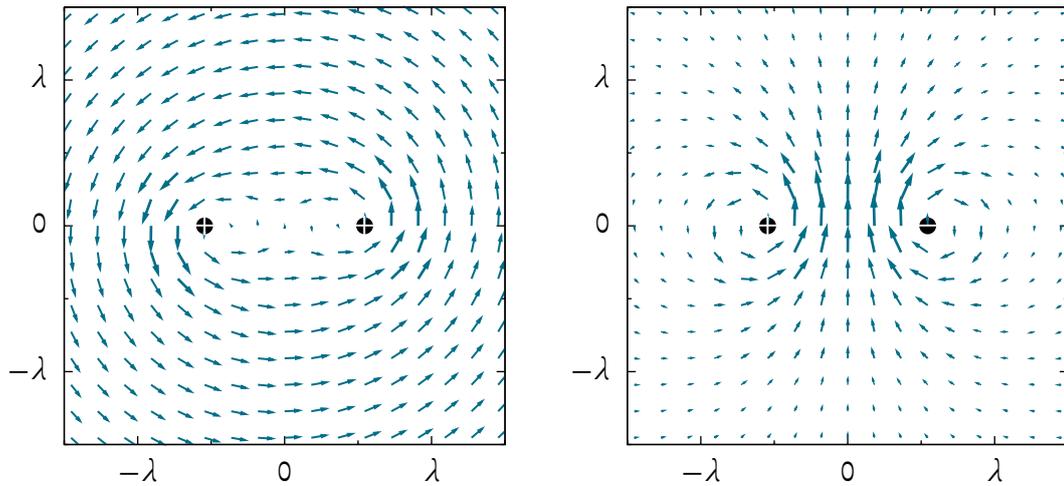


Abbildung 6.5.: Bedingtes Geschwindigkeitsfeld $\langle \mathbf{u}(x) | \Omega_1, \Omega_2 \rangle$, wobei für den Abstand zwischen den beiden Vortizitäten die Taylorlänge, $r = \lambda$, gewählt wurde. Die x - und die y -Achse geben die Komponenten des Ortes x an, die Vektorpfeile die Geschwindigkeit \mathbf{u} . Auf der linken Seite wurde auf zwei positive Vortizitäten bedingt, rechts auf eine positive und eine negative.

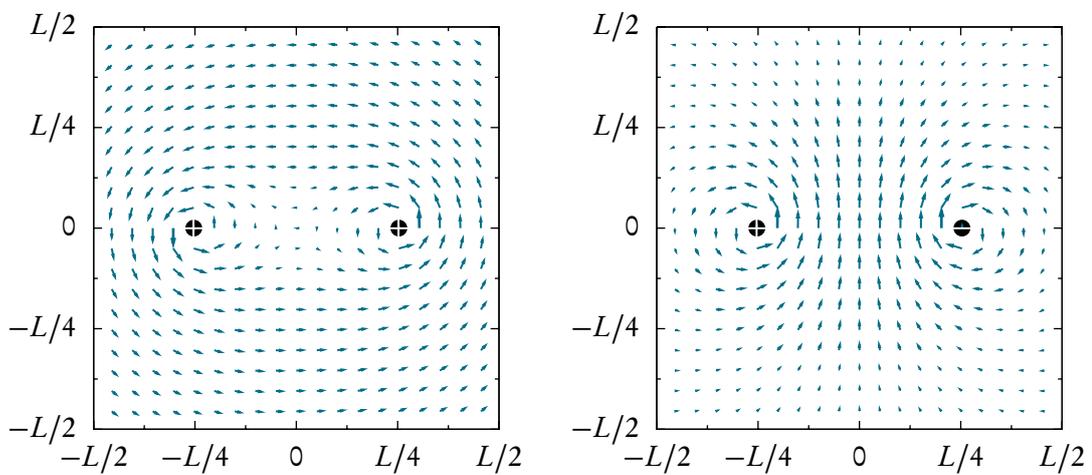


Abbildung 6.6.: Bedingtes Geschwindigkeitsfeld $\langle \mathbf{u}(x) | \Omega_1, \Omega_2 \rangle$. Es wird, wie in Abbildung 6.6, einmal der Fall Ω_1 und Ω_2 positiv, und einmal der Fall Ω_1 positiv und Ω_2 negativ gezeigt. Dabei wurde hier die halbe integrale Länge als Abstand der beiden Vortizitäten gewählt, also $r = L/2$.

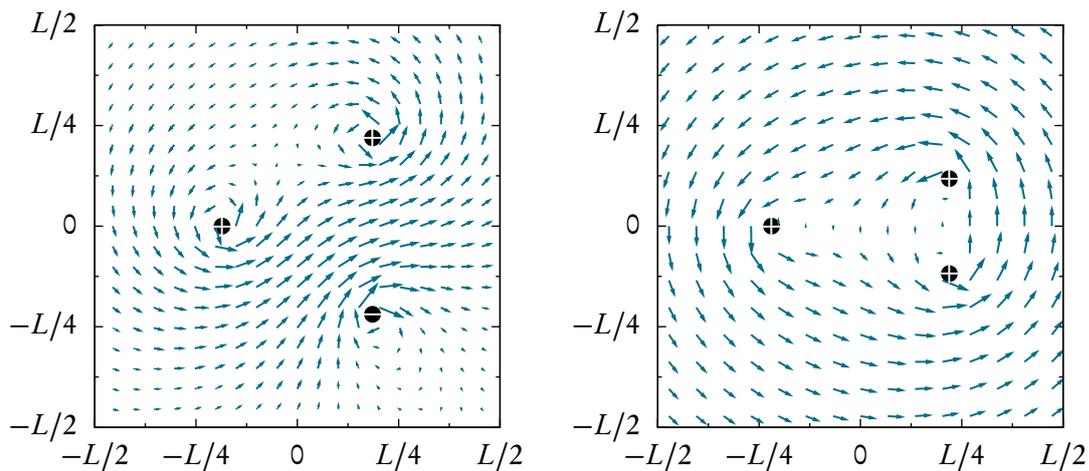


Abbildung 6.7.: Mittlere Geschwindigkeitsfelder bedingt auf die Vortizität an drei Punkten, $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \rangle$. Links: Ein gleichseitiges Dreieck aus zwei positiven und einer negativen Vortizität. Rechts: Gleichseitiges Dreieck aus drei positiven Vortizitäten.

Ω_1, Ω_2 und Ω_3 bestimmt, siehe Abbildung 6.7. Auch hier zeigt sich die punktwirbelartige Struktur, die schon in den zweifach bedingten Feldern aufgetreten ist.

6.3. Diskussion

In diesem Kapitel wurden Gleichungen der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie (siehe Kapitel 4) untersucht. Da die Gleichungen nicht geschlossen sind, wurden erste Schritte hinsichtlich einer möglichen Schließung unternommen. Diese bestanden darin, die nicht analytisch zu behandelnden Terme mit Hilfe numerischer Simulationen zu betrachten.

In der Entwicklungsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichten der Vortizitätsinkremente treten zwei nicht geschlossene Terme auf. Der eine ist mit der viskosen Dissipation in Verbindung zu bringen. Er ist näherungsweise konstant und zeigt nur in den Außenbereichen Abweichungen von diesem Verhalten. Der zweite Term koppelt an das Geschwindigkeitsfeld. Für seine Form konnte ein Fit angegeben werden, der den Verlauf wiedergibt. Allerdings sei an dieser Stelle bemerkt, dass die exakte Form dieses Fits noch zur Debatte steht. Erste Untersuchungen mit anderen Datensätzen legen nämlich nahe, dass eventuell eine einfachere Approximation genügt.

Außerdem wurden mittlere bedingte Geschwindigkeitsfelder untersucht, die in Verbindung mit Termen in den Lundgren-Monin-Novikov-Entwicklungsgleichungen für die Zwei- bzw. Dreipunktortizitätswahrscheinlichkeit stehen. Die Struktur dieser Felder erinnert an Wirbelfelder von zwei bzw. drei Punktwirbeln. Es konnten jedoch noch keine genaueren Untersuchungen dieser Felder vorgestellt werden. Interessant wäre es, die gemessenen Geschwindigkeitsfelder durch zwei bzw. drei punktwirbelartige Strukturen modellieren zu können. Dazu ist die Kenntnis des Geschwindigkeitsprofils dieser Wirbel

6. Schließungsansatz für die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie

nötig. Die Auswertungen zu diesem Thema wurden angefangen, sind aber noch zu keinem Abschluss gekommen.

Ein Manko, das an dieser Stelle besonders hervorgehoben werden muss, ist die Tatsache, dass für alle Auswertungen auf die Simulation `sim1024` aus dem vorigen Kapitel (Abschnitt 5.1) zurückgegriffen werden musste. In dieser wurde allerdings eine sogenannte Hyperviskosität, d. h. eine höhere Potenz des Laplace-Operators, benutzt, um die Wirbeltransportgleichung zu simulieren. Zum Zeitpunkt des Niederschreibens dieser Arbeit lag keine Simulation vor, bei der auf kleinen Skalen ausschließlich viskos, d. h. nicht hyperviskos, dissipiert wird, und die gleichzeitig einen ausgeprägten Skalierungsbereich in der inversen Kaskade zeigt. Der Nachteil der Hyperviskosität ist, dass einer der Schritte, die auf die benutzten Gleichungen der Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie geführt haben (nämlich Gleichung (4.9)) nicht einfach übertragbar ist und obige Gleichungen dadurch nicht exakt erfüllt sind.

Neben diesem offensichtlichen, hat sich während der Untersuchungen ein zweiter Nachteil der benutzen Simulation herausgestellt. Bei der Analyse der Vortizitätsinkrementwahrscheinlichkeitsdichten in Abschnitt 6.1 wurde festgestellt, dass diese sich in erster Linie auf kleinen Skalen, d. h. zu Beginn der inversen Kaskade, ändern. Die Parameter der Simulation `sim1024` wurden allerdings so gewählt, dass sich ein möglichst breiter Inertialbereich ergibt. Andersherum bedeutet das, dass gerade der Übergang in die Kaskade schlecht aufgelöst wird. Da sich für die Vortizitätsinkremente scheinbar aber gerade dort die interessanten Phänomene abspielen, wäre es sinnvoll eine Simulation zu präparieren, die diesen Übergang besser auflöst, eventuell sogar eine Doppelkaskade zeigt.

Außerdem zeigen erste Untersuchungen, dass die Schwingungen, die man besonders gut in den Fit-Parametern in Abbildung 6.3 erkennen kann, mit der räumlichen Korrelationslänge der treibenden Kraft variieren. Insbesondere vor dem Hintergrund der schlechten Auflösung ist daher noch nicht geklärt, ob diese Schwingungen physikalischer Natur, oder nur ein numerisches Artefakt sind.

Alles in allem stehen die hier vorgestellten Überlegungen noch in einem frühen Stadium. Sie liefern zwar keine endgültigen Resultate, weisen aber eine Richtung, in der tiefere Untersuchungen vielversprechend sind.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Außerdem ist es zwar dumm aber wahr,
daß das Selbstbewußtsein darunter
leidet, wenn man nicht alle Vorräte
beisammen sieht und so mit einem
einzigem Blick weiß was man besitzt.

(Franz Kafka, Der Bau)

In dieser Arbeit wurden verschiedene Aspekte zweidimensionaler Strömungen beleuchtet. Insbesondere wurden die statistischen Eigenschaften von Geschwindigkeits- und Vortizitätsinkrementen untersucht.

Es konnte nachgewiesen werden, dass die longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente für Abstände größer der Markow-Einstein-Länge der Markow-Bedingung gehorchen. Basierend auf diesem Ergebnis konnten Drift- und Diffusionskoeffizient einer Fokker-Planck-Gleichung geschätzt werden, welche die Entwicklung der Inkrement-pdfs in der Skala beschreibt. Diese Fokker-Planck-Gleichung konnte durch Näherung von Drift- und Diffusionskoeffizienten auf einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess zurückgeführt werden. Letzterer kann exakt gelöst werden und die Lösungen stimmen gut mit gemessenen Daten überein. Diese Ergebnisse erweitern bereits bekannte Resultate aus dreidimensionalen Strömungen (siehe Friedrich und Peinke 1997a und Renner et al. 2001) auf den speziellen Fall zweidimensionaler Turbulenz im Regime der inversen Kaskade.

Die Tatsache, dass sowohl in drei- als auch in zweidimensionalen Strömungen eine endliche Markow-Einstein-Länge existiert, oberhalb derer die Geschwindigkeitsinkremente sich markowsch in der Skala verhalten, legt die Vermutung nahe, dass es sich hierbei um eine universelle Eigenschaft handelt. Es ist nun ein erstrebenswertes Ziel, diese Markow-Einstein-Länge aus den Grundgleichungen begründen zu können.

Einen möglichen Weg dorthin könnte die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie bieten. Sie kann aus den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet werden und führt auf Entwicklungsgleichungen für die pdfs verschiedener Observablen.¹ Diese Entwicklungsgleichungen weisen formale Ähnlichkeiten mit Fokker-Planck-Gleichungen auf und stehen somit in Verbindung mit den oben beschriebenen Ergebnissen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde die Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie genutzt, um die Wahrscheinlichkeitsdichten der Vortizitätsinkremente zu untersuchen. Hier konnten noch keine abschließenden Resultate erzielt werden, jedoch scheinen die ersten Ergebnisse vielversprechend. Die beiden nicht geschlossenen Terme in der Entwicklungsgleichung für die Vortizitätsinkrementwahrscheinlichkeitsdichte wurden numerisch bestimmt. Der

¹In der vorliegenden Arbeit werden nur die Gleichungen für Vortizitäts- und Vortizitätsinkrementwahrscheinlichkeitsdichten angegeben. Es lassen sich aber genauso Gleichungen für die Geschwindigkeits-pdfs und insbesondere für die Geschwindigkeitsinkrement-pdfs herleiten.

7. Zusammenfassung und Ausblick

eine erwies sich als näherungsweise konstant, für den anderen konnte eine funktionale Form angegeben werden.

Weiterhin wurden in diesem Zusammenhang auf zwei bzw. drei Vortizitäten bedingte Geschwindigkeitsfelder untersucht. Diese Felder weisen eine markante Struktur auf, die mit Wirbelstrukturen in Verbindung gebracht werden kann.

Es besteht die Hoffnung, dass eine Kombination aus Lundgren-Monin-Novikov-Hierarchie und numerischer Simulation sich bei der Suche nach dem Ursprung der Markow-Einstein-Länge als fruchtbar erweist. Ein erster Schritt, diesen Ursprung festzumachen, könnte aber zunächst darin bestehen, die Abhängigkeit der Markow-Einstein-Länge von der Wahl der Simulationsparameter genauer zu untersuchen, als es in der vorliegenden Arbeit möglich war.

Teil III.

Anhang

A. Mathematische Grundlagen

A.1. Isotrope Tensoren

Seit Lord Kelvin (1887) ist der Begriff der homogenen isotropen Turbulenz bekannt und spätestens seit den Arbeiten von Taylor (1935) und von Kármán und Howarth (1938) ist es üblich, turbulente Flüssigkeitsströmungen als einen statistisch isotropen Zustand zu betrachten, d. h. man fordert, dass statistische Größen, wie z. B. die Geschwindigkeitsautokorrelation, invariant unter Drehungen und Spiegelungen sind.¹ Da diese Größen sich als Tensoren betrachten lassen, macht es Sinn, sich über die allgemeine Form isotroper Tensoren klar zu werden.

Mathematisch lässt sich zeigen (siehe z. B. Temple 1960, S. 55 ff.), dass in zwei Dimensionen alle Multilinearformen, die invariant gegenüber Drehungen sind, als Linearkombination aus (xy) und $[xy]$ darstellbar sind, wobei

$$(xy) = x_1y_1 + x_2y_2 \quad \text{und} \quad [xy] = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Fordert man weiterhin Invarianz gegenüber Spiegelungen, so fällt das *bracket*-Produkt $[xy]$ weg und es bleibt nur das Skalarprodukt (xy) übrig. Diesem entspricht gerade das Kronecker-Symbol δ_{ik} . Aus diesem Ergebnis lassen sich Relationen für isotrope Tensoren beliebiger Stufe in beliebigen Dimensionen herleiten.

So findet man für isotrope Tensoren, die von einem Vektor r abhängen, die Relationen (siehe Robertson 1940 oder Batchelor 1953, S. 42)

$$\begin{aligned} T_i(r) &= A(r)r_i, \\ T_{ij}(r) &= A(r)r_i r_j + B(r)\delta_{ij}, \\ T_{ijk}(r) &= A(r)r_i r_j r_k + B(r)r_i \delta_{jk} + C(r)r_j \delta_{ki} + D(r)r_k \delta_{ij}, \\ T_{ijkl}(r) &= A(r)r_i r_j r_k r_l + B(r)r_i r_j \delta_{kl} + C(r)r_j r_k \delta_{li} + D(r)r_k r_l \delta_{ij} + E(r)r_l r_i \delta_{jk} \\ &\quad + F(r)r_i r_k \delta_{jl} + G(r)r_j r_l \delta_{ik} + H(r)\delta_{ij} \delta_{kl} + I(r)\delta_{ik} \delta_{jl} + J(r)\delta_{il} \delta_{jk}, \end{aligned}$$

wobei die $A(r), B(r), \dots$ gerade Funktionen von r sind. Diese Relationen gelten sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen. Hängt der Tensor T nicht von r ab, so kann man in obigen Relationen $r = 0$ setzen und erhält z. B.

$$T_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

mit konstanten α, β und γ .

¹Man beachte, dass in anderen Zusammenhängen der Begriff *Isotropie* häufig nur die Invarianz unter Rotation und nicht die unter Spiegelung beinhaltet.

A.2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Man findet allein in der physikorientierten Literatur eine Vielzahl an Möglichkeiten, Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsdichten einzuführen – vom exakten maßtheoretischen (Frisch 1996) bis zum eher intuitiven Zugang (Davidson 2004). Wir werden hier dem Weg von Risiken (1996) folgen. Das hat den Vorteil, dass sich auf natürlichem Wege auch die sogenannte *feinkörnige Wahrscheinlichkeitsdichte* ergibt, die andernfalls später ad hoc eingeführt werden müsste. Eine ausführlichere mathematische Einführung findet sich z. B. in Feller (1968, 1971).

A.2.1. Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsdichten

Sei ξ das Ergebnis einer Messung deren Ausgang nicht vorhersagbar ist, dann nennt man ξ eine *Zufallsvariable*. In den klassischen Beispielen steht ξ für die Augenzahl eines geworfenen Würfels oder den Ausgang eines Münzwurfs; ξ kann aber auch für die zum Zeitpunkt t am Ort x gemessene Geschwindigkeit $u(x, t)$ einer turbulent strömenden Flüssigkeit stehen.

Führt man obige Messung mehrfach durch und erhält die Werte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, kann man das zugehörige arithmetische Mittel berechnen. Im Gegensatz zu den einzelnen ξ_i die unvorhersagbar sind, ist der Mittelwert für $N \rightarrow \infty$ und identische Systeme immer gleich,

$$\langle \xi \rangle_\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N).$$

Für den Mittelwert beliebiger Funktionen $f(\xi)$ von Zufallsvariablen gilt

$$\langle f(\xi) \rangle_\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_N)], \quad (\text{A.1})$$

wobei der Index an der eckigen Klammer, $\langle \cdot \rangle_\xi$, die Zufallsvariable angibt, über die gemittelt wird.²

Mit Hilfe der Heaviside-Funktion,

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0, \\ 0 & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

und Gl. (A.1) kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(y)$ definieren

$$P(y) := \langle \Theta(y - \xi) \rangle_\xi. \quad (\text{A.2})$$

Sie gibt die relative Häufigkeit an, mit der ein $\xi \leq y$ gemessen wird. Aus der Definition (A.2) ersieht man direkt, dass $P(y)$ monoton steigt und $P(y \rightarrow \infty) = 1$.

²In der vorliegenden Arbeit werden die Begriffe *Mittelwert* und *Erwartungswert* synonym benutzt. Eine rigorosere Behandlung würde hier eine Unterscheidung notwendig machen (siehe z. B. Sivia und Skilling 2006).

A.2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stellt man nun die Frage nach der Wahrscheinlichkeit ein $\xi \in [y, y + dy]$ zu messen, führt das auf die *Wahrscheinlichkeitsdichte* (engl. *probability density function*, oder kurz *pdf*) $p_\xi(y)$

$$P(y + dy) - P(y) = \frac{d}{dy} P(y) dy =: p_\xi(y) dy.$$

Genauer gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_\xi(y)$

$$\begin{aligned} p_\xi(y) &= \frac{d}{dy} \langle \Theta(y - \xi) \rangle_\xi \\ &= \left\langle \frac{d}{dy} \Theta(y - \xi) \right\rangle_\xi \\ &= \langle \delta(\xi - y) \rangle_\xi. \end{aligned}$$

Die Diracsche δ -Distribution, die hier auftritt, nennt man auch *feinkörnige Wahrscheinlichkeitsdichte*.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_\xi(y)$ enthält die komplette Information über die statistischen Eigenschaften der Zufallsvariablen ξ . Ihre Kenntnis erlaubt es, beliebige Erwartungswerte zu berechnen

$$\begin{aligned} \langle f(\xi) \rangle_\xi &= \left\langle \int f(y) \delta(y - \xi) dy \right\rangle_\xi \\ &= \int f(y) \langle \delta(y - \xi) \rangle_\xi dy \\ &= \int f(y) p_\xi(y) dy. \end{aligned}$$

Setzt man $f(\xi) \equiv 1$ sieht man, dass $p_\xi(x)$ normiert ist.

A.2.2. Verbund- und bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten

Alle Ergebnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt lassen sich in natürlicher Weise auch auf mehrere Zufallsvariablen ξ^1, ξ^2, \dots ausweiten. Dabei kann es sich bei den ξ^i z. B. um die Augenzahl mehrerer geworfener Würfel handeln, oder um gleichzeitig an verschiedenen Orten x_i gemessene Geschwindigkeiten $\mathbf{u}(x_i, t)$ einer turbulent strömenden Flüssigkeit.

In diesem Fall wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_\xi(y)$ zur *Verbundwahrscheinlichkeitsdichte* (engl. *joint probability density function*, *jpdf*)

$$p_{\xi^1, \xi^2, \dots}(y^1, y^2, \dots) := \langle \delta(y^1 - \xi^1) \delta(y^2 - \xi^2) \dots \rangle_{\xi^1, \xi^2, \dots}.$$

Durch Integration über eines der Argumente,

$$\int p_{\xi^1, \xi^2, \dots}(y^1, y^2, \dots) dy^i = p_{\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, \xi^{i+1}, \dots}(y^1, \dots, y^{i-1}, y^{i+1}, \dots),$$

A. Mathematische Grundlagen

kann das jeweilige Argument aus der jpdf eliminiert werden.

Betrachtet man mehrere Zufallsvariablen kann man fragen: "Gegeben die Ergebnisse der Messungen der Zufallsvariablen ξ_{i+1}, \dots, ξ_n sind bekannt, wie wahrscheinlich ist es dann, $\xi^j \in [y^j, y^j + dy^j]$ für $j = 1, \dots, i$ zu messen?" Die Antwort liefern die sog. *bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten* (engl. *conditional probability density function, cpdf*)

$$p_{\xi^1, \dots, \xi^i}(y^1, \dots, y^i | y^{i+1}, \dots, y^n) := \frac{p_{\xi^1, \dots, \xi^n}(y^1, \dots, y^n)}{p_{\xi^{i+1}, \dots, \xi^n}(y^{i+1}, \dots, y^n)}. \quad (\text{A.3})$$

Die Motivation dieser Definition wird deutlich, wenn man den Nenner des Bruchs auf die andere Seite bringt.

Faktoriert die jpdf, d. h. gilt

$$p_{\xi^1, \xi^2, \dots}(y^1, y^2, \dots) = p_{\xi^1}(y^1) \cdot p_{\xi^2}(y^2) \cdots,$$

So sagt man die Zufallsvariablen ξ^1, ξ^2, \dots sind *statistisch unabhängig*. Für statistisch unabhängige Zufallsvariablen vereinfachen sich viele Relationen, insbesondere gilt für die cpdf

$$p_{\xi^1, \dots, \xi^i}(y^1, \dots, y^i | y^{i+1}, \dots, y^n) = p_{\xi^1, \dots, \xi^i}(y^1, \dots, y^i) = p_{\xi^1}(y^1) \cdots p_{\xi^i}(y^i).$$

Die Zufallsvariablen ξ^{i+1}, \dots, ξ^n haben also keinerlei Einfluss auf die Ergebnisse der Messungen der Zufallsvariablen ξ^1, \dots, ξ^i .

Abschließend sei noch bemerkt, dass die Indizierung der Wahrscheinlichkeitsdichten und Erwartungswerte mit den jeweils zugehörigen Zufallsvariablen nur in diesem einführenden Kapitel durchgezogen wurde. Im übrigen Teil der Arbeit werden die Indizes weggelassen. Die jpdf $p_{\xi^1, \xi^2}(y^1, y^2)$ wird z. B. einfach zu $p(y^1, y^2)$.

B. Verschiedene Rechnungen und Herleitungen mit detaillierteren Schritten

In diesem Kapitel sind einige längere Rechnungen und Herleitungen zusammengefasst, die im Hauptteil der Arbeit keinen Platz gefunden haben.

B.1. Geschwindigkeitsautokorrelation

Herleitung von Gleichung (1.10)

Einerseits gilt wegen der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes

$$\frac{\partial}{\partial r_i} R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r_j} R_{ij}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Dies sieht man schnell, wenn man die Definition von $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$ ausschreibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle &= \left\langle u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial r_j} u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \right\rangle \\ &= \left\langle u_i(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial (x+r)_k} u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \right] \frac{\partial}{\partial r_j} (x+r)_k \right\rangle \\ &= \left\langle u_i(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial (x+r)_k} u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \right] \delta_{jk} \right\rangle \\ &= \langle u_i(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dass auch die Ableitung nach r_i verschwindet folgt unmittelbar aus $R_{ij}(\mathbf{r}, t) = R_{ji}(-\mathbf{r}, t)$.

Andererseits kann man direkt Gleichung (1.9) ableiten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ R_{tt}(r) \delta_{ij} + [R_{\ell\ell}(r) - R_{tt}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} \right\} \\ = R'_{tt}(r) \frac{r_i}{r} \delta_{ij} + [R'_{\ell\ell}(r) - R'_{tt}(r)] \frac{r_i}{r} \frac{r_j}{r^2} \\ + [R_{\ell\ell}(r) - R_{tt}(r)] \left(\frac{\delta_{ii} r_j}{r^2} + \frac{\delta_{ij} r_i}{r^2} - 2 \frac{r_i r_j r_i}{r^4} \right) \\ = \frac{r_j}{r^2} \left\{ r R'_{\ell\ell}(r) + (d-1) \cdot [R_{\ell\ell}(r) - R_{tt}(r)] \right\}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

B. Verschiedene Rechnungen und Herleitungen mit detaillierteren Schritten

wobei d die Dimension des betrachteten Systems bedeutet.

Durch Gleichsetzen von (B.1) und (B.2) erhält man Gleichung (1.10).

B.2. Kraichnans Überlegungen zur inversen Energiekaskade

In Abschnitt 2.6 wurde die *inverse Energiekaskade* in zwei Dimensionen eingeführt. Demnach wird in zweidimensionalen turbulenten Strömungen Energie durch äußere Kräfte auf mittleren Skalen injiziert und fließt dann in Richtung großer Skalen. Die Bestätigung dieser Vorstellung geht auf Robert H. Kraichnan (1967) zurück, der dabei allerdings auf einige in dieser Arbeit nicht berücksichtigte Resultate zurückgreifen konnte (z. B. Onsager 1949; Lee 1951; Ogura 1962). In diesem Abschnitt sollen nun Kraichnans Überlegungen zur Energiekaskade in zweidimensionaler Turbulenz in groben Zügen nachvollziehbar gemacht werden.

Startpunkt für Kraichnans Argumentation ist die Energiebilanzgleichung (2.3) im nicht-getriebenen Fall

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k) = T(k),$$

wobei hier die Zeitabhängigkeit der Übersichtlichkeit halber nicht mehr explizit angegeben wird. Für den Energietransfer, $T(k)$, liefert Kraichnan (1967) einen expliziten Ausdruck

$$T(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty T(k, p, q) dp dq,$$

mit

$$T(k, p, q) = \begin{cases} -2\pi k \operatorname{Im} \left\{ \frac{2\pi}{|\sin(p, q)|} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^4 (k_m \delta_{ij} + k_j \delta_{im}) \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{q}) \rangle \right\} & \text{falls } \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \\ 0 & \text{sonst.}^1 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Hier sind k , p und q die Beträge der zugehörigen Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{p} und \mathbf{q} ; $\sin(p, q)$ steht für den Sinus des Winkels zwischen den Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} . Mit $\hat{u}(\mathbf{k})$ wird die Fourier-Transformierte des Geschwindigkeitsfeldes auf einem quadratischen Gebiet der Kantenlänge L bezeichnet. Die Bedingung $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ bedeutet, dass nur solche Wellenzahlen einen Beitrag zu $T(k)$ liefern, die die Seiten eines Dreiecks bilden können. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Triaden-Interaktion*.

Zur Herleitung Gleichung (B.3) kann man aus dem entsprechenden Ausdruck für die Fourier-Transformierte der Spur des Geschwindigkeitsautokorrelationstensors $\Phi_{ii}(\mathbf{k})$ (vgl. Gl. (2.2)) folgern. Letzterer lässt sich relativ einfach aus den Navier-Stokes-Gleichungen im

¹Im Vergleich zum Original (Kraichnan 1967, Gl. 2.4) wurde hier \mathbf{k} durch $-\mathbf{k}$ ersetzt, was auf $T(k, p, q)$ keinen Einfluß hat, aber nachfolgende Überlegungen besser nachvollziehbar macht.

B.2. Kraichnans Überlegungen zur inversen Energiekaskade

Fourier-Raum herleiten (siehe z.B. Pope 2000, Gl. 6.162). Die darauf aufbauende Herleitung von Gleichung (B.3) ist allerdings langwieriger und soll hier nicht angegeben werden. Die Herleitung einer analogen Formel wird von Rose und Sulem (1978, Appendix 2) explizit durchgeführt.

Detaillierte Erhaltung Kraichnan folgert weiter, dass *detaillierte Erhaltung* von Energie und Enstrophie gilt

$$\begin{aligned} T(k, p, q) + T(p, q, k) + T(q, k, p) &= 0, \\ k^2 T(k, p, q) + p^2 T(p, q, k) + q^2 T(q, k, p) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dies sieht man schnell, wenn man die Terme explizit aufschreibt. Dann treten nämlich nur zyklische Permutationen von

$$\underbrace{[(k+p) \cdot \hat{u}(q)]}_{=-q} [\hat{u}(k) \cdot \hat{u}(p)]$$

auf. Diese Terme verschwinden aber wegen der Inkompessibilitätsbedingung $\mathbf{k} \cdot \hat{u}(k) = 0$.

Zerlegung des Energieflusses Dann greift Kraichnan auf ein Ergebnis aus einer älteren Veröffentlichung (Kraichnan 1959) zurück, wonach für den Energiefluß durch die Mode k (siehe Gl. 2.5) gilt

$$\begin{aligned} \Pi(k) &= - \int_0^k T(k') dk' \\ &= \frac{1}{2} \int_k^\infty dk' \int_0^k \int_0^k T(k', p, q) dp dq - \frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_k^\infty \int_k^\infty T(k', p, q) dp dq. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Diese Relation folgt aus folgender Zerlegung des Energieflusses (vgl. Rose und Sulem 1978)

$$\Pi(k) = \Pi_{\text{I}}(k) + \Pi_{\text{II}}(k) + \Pi_{\text{III}}(k) + \Pi_{\text{IV}}(k) \quad (\text{B.6})$$

mit

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{I}}(k) &= -\frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_0^k \int_0^k T(k', p, q) dp dq, \\ \Pi_{\text{II}}(k) &= -\frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_k^\infty \int_k^\infty T(k', p, q) dp dq, \\ \Pi_{\text{III}}(k) &= -\frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_k^\infty \int_0^k T(k', p, q) dp dq, \\ \Pi_{\text{IV}}(k) &= -\frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_0^k \int_k^\infty T(k', p, q) dp dq. \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme, die hier auftreten, stehen jeweils für bestimmte Triadensituationen, die in Abbildung B.1 dargestellt sind. Man erkennt, dass Triaden der Klasse (I) keinen

B. Verschiedene Rechnungen und Herleitungen mit detaillierteren Schritten

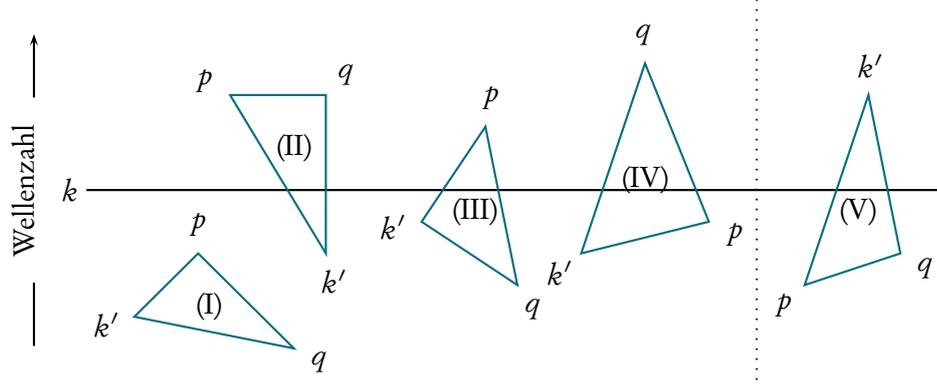


Abbildung B.1.: Illustration zu den Termen, die in der Zerlegung des Energieflusses, Gleichung (B.6), vorkommen (vgl. Kraichnan 1959).

Beitrag zum Energiefluss durch die Mode k liefern. Mit Hilfe der detaillierten Erhaltung, Gleichung (B.4), kann man zeigen, dass $\Pi_I(k) = 0$ gilt. Wegen der Symmetrie $T(k, p, q) = T(k, q, p)$ gilt weiter $\Pi_{III}(k) = \Pi_{IV}(k)$, wodurch sich folgende Umformung ergibt

$$\begin{aligned}
 \Pi_{III}(k) + \Pi_{IV}(k) &= 2\Pi_{IV}(k) \\
 &= - \int_0^k dk' \int_0^k dp \int_k^\infty dq T(k', p, q) \\
 &= - \frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_0^k dp \int_k^\infty dq [T(k', p, q) + T(p, k', q)] \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_0^k dp \int_k^\infty dq T(q, k', p) \\
 &= \frac{1}{2} \int_k^\infty dk' \int_0^k dp \int_0^k dq T(k', p, q) = -\Pi_V(k).
 \end{aligned}$$

In den einzelnen Umformungen wurden Variablen getauscht und die detaillierte Erhaltung, Gleichung (B.4), genutzt. Setzt man diese Ergebnisse in Gleichung (B.6) ein, erhält man schließlich Kraichnans Zerlegung des Energieflusses, Gleichung (B.5).

Diese Zerlegung zeigt, dass sich der gesamte Energiefluss durch die Wellenzahl k ausschließlich aus Beiträgen aus dem Bereich $k' > k$ von Triaden mit $p, q < k$ und Beiträgen aus dem Bereich $k' < k$ von Triaden mit $p, q > k$ zusammensetzt. Analog lässt sich für den Enstrophiefluss zeigen

$$\begin{aligned}
 Z(k) &= \frac{1}{2} \int_k^\infty (k')^2 dk' \int_0^k \int_0^k T(k', p, q) dp dq \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^k (k')^2 dk' \int_k^\infty \int_k^\infty T(k', p, q) dp dq.
 \end{aligned}$$

B.2. Kraichnans Überlegungen zur inversen Energiekaskade

Forderung der Selbstähnlichkeit Kraichnan betrachtet dann den Energiefluss unter der Forderung der Selbstähnlichkeit für $E(k)$ und daraus folgend für $T(k, p, q)$

$$E(ak) = a^{-\zeta} E(k),$$

$$T(ak, ap, aq) = a^{-(1+3\zeta)/2} T(k, p, q).$$

Hier sind der Skalierungsfaktor a und der Skalierungsexponent ζ zunächst frei wählbar. Der zweite Skalierungsexponent ergibt sich aus der Überlegung, dass $T(k, p, q)$ die gleichen Dimensionen wie $E(k)^{3/2} k^{-1/2}$ hat.

Kraichnan setzt diese Forderung nun in den Ausdruck für den Energiefluss durch die Mode k ein, führt eine Substitution für die Variablen k, p und q durch, und wählt geschickt einen Skalierungsfaktor a . Nach einigen Rechenschritten kann er so zeigen, dass für die beiden nach der Kolmogorov-Hypothese (siehe Abschnitt 2.6) erwarteten Skalierungsexponenten $\zeta = -3$ bzw. $\zeta = -5/3$ gilt

$$\Pi(k) \begin{cases} \leq 0 & \text{falls } \zeta = -\frac{5}{3}, \\ = 0 & \text{falls } \zeta = -3 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad Z(k) \begin{cases} = 0 & \text{falls } \zeta = -\frac{5}{3}, \\ \geq 0 & \text{falls } \zeta = -3. \end{cases}$$

D. h. in einem $k^{-5/3}$ -Skalierungsbereich fließt nur Energie, während in einem k^{-3} -Bereich nur Enstrophie fließt und zwar in die entgegengesetzte Richtung. Durch weitere Überlegungen konnte Kraichnan dann begründen, dass die Energie von einer mittleren Wellenzahl, auf der Energie injiziert wird, weg in Richtung kleiner Wellenzahlen fließt, bzw. umgekehrt für die Enstrophie (vgl. Fjørtofts Theorem, Abschnitt 2.6.1).

C. Anmerkungen zur Numerik

Warning: File [...] has modification time
0,45 s in the future

(Warnung in der IDE Eclipse)

C.1. Binning

Wenn man aus einer Messreihe $x_i, i = 1, 2, \dots$ die der Messgröße unterliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung schätzen möchte, bedient man sich üblicherweise Histogrammen. Dazu unterteilt man das Intervall $[x_{min}, x_{max}]$ auf dem die Messwerte x_i liegen in N Klassen (engl. *bins*) und sortiert jeden Messwert x_i in die zugehörige Klasse k ein. Dabei stellt sich das Problem, wie man diese Sortierung idealerweise vornimmt, denn einige vorschnelle Lösungen können asymmetrisch sein oder gewisse x_i überhaupt nicht berücksichtigen. Folgende Formel hat diese Probleme nicht¹

$$k = \left\lfloor \frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} N \right\rfloor. \quad (\text{C.1})$$

Der Verlauf dieser Funktion wird in Abbildung C.1 dargestellt. Ein Nachteil dieser Definition ist, dass je eine der Grenzen des Intervalls, hier x_{max} , nicht berücksichtigt wird. Da es sich dabei aber um eine Nullmege handelt, sollte dies üblicherweise kein Problem darstellen. Dennoch ist es empfehlenswert in einem etwaigen Programmcode zu überprüfen, ob der Wert k im erlaubten Bereich liegt.

Ist die vorliegende Messreihe nicht umfangreich genug, oder interessiert man sich besonders für die Ausläufer der zu schätzenden Verteilungsfunktion kann die Methode der

¹So wie die Formel angegeben ist, nimmt k die Werte $0, \dots, N - 1$ an, was für die Programmiersprache C sinnvoll ist. Für Fortran hingegen müsste man in der Gaußklammer noch eine Eins addieren.

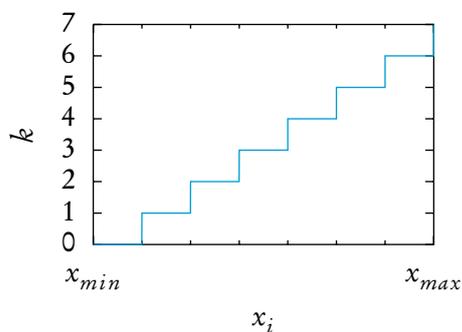


Abbildung C.1.: Hier wird die *Binning*-Formel (C.1) für $N = 7$ dargestellt. Auf der y -Achse lässt sich der Index k des *Bins* ablesen, in das der Messwert x_i einsortiert würde.

C. Anmerkungen zur Numerik

Kerndichteschätzung (engl. *kernel density estimation*) hilfreich sein. Sie kam aber für die vorliegende Arbeit nicht zum Einsatz und soll daher hier nicht näher besprochen werden.

Danksagung

Zuforderst möchte ich meinen Eltern danken, die mich mein ganzes Studium mit vollem Vertrauen in mich und meine Fähigkeiten großzügig unterstützt haben. Dieser Dank gilt genauso meiner ganzen Familie, die dem in nichts nachstanden.

Dann möchte ich Professor Friedrich danken, der es mir ermöglicht hat, in seiner Arbeitsgruppe an diesem interessanten Thema zu forschen und mich stets freundlich betreut hat. Außerdem hat er mir die Möglichkeit gegeben, Konferenzen zu besuchen und erste eigenständige Gehversuche auf wissenschaftlichem Terrain zu unternehmen.

Der ganzen Arbeitsgruppe möchte ich für das kollegiale Arbeitsklima und die angeregte Arbeitsatmosphäre danken. Das gemeinschaftliche Mittagessen und den nachmittäglichen Kaffee habe ich stets sehr genossen. Besonderer Dank gilt dabei Michael Wilczek und Oliver Kamps, die mir mit viel Geduld und Begeisterung für die Materie zur Seite standen, und dabei vom kleinsten Computerkniff bis zur physikalischen Theorie an der Front der Forschung ihr Wissen mit mir geteilt haben.

Ich möchte diese Arbeit nicht enden lassen, ohne auch meinen Freundinnen und Freunden gedankt zu haben, die es mir nie übel genommen haben, wenn ich mich in der Vorbereitungsphase einer Prüfung oder während des Schreibens dieser Diplomarbeit wochenlang nicht gemeldet habe. Außerdem möchte ich mich bei allen Leuten bedanken, die mich, und wenn auch nur streckenweise, durchs Studium begleitet haben und es mir soviel mehr haben werden lassen, als rein akademischen Wissenserwerb.

Zum Schluss gebührt noch den Korrekturleser/-innen, die allesamt hier an der ein oder anderen Stelle schon Erwähnung fanden, ein großer Dank speziell dafür.

Symbolverzeichnis

Römische Großbuchstaben

\mathcal{A}	Entspricht dem Quadrat des Vorfaktors des <i>Forcing</i> terms in der benutzten Simulation, siehe Abschnitt 5.1
$D^{(n)}(v, r)$	Kramers-Moyal-Koeffizient n -ter Ordnung, siehe Abschnitt 3.3.1
$\tilde{D}^{(1/2)}(v, r)$	Fit an den Drift- bzw. Diffusionskoeffizienten, siehe Abschnitt 5.4.2
$E(k, t)$	Energiespektrum
$\mathcal{E}(t)$	Mittlere kinetische Energie pro Masseneinheit
L	Integrale Längenskala
$M^{(n)}(v, r, \Delta r)$	Bedingtes Moment n -ter Ordnung, siehe Abschnitt 3.3.1
N_{data}	Anzahl der zur Verfügung stehenden Datenpunkte
\mathcal{N}	Normierungsfaktor
$\mathcal{O}(\cdot)$	Größenordnung
Re	Reynolds-Zahl
R_{ij}	Geschwindigkeitsautokorrelation, siehe Abschnitt 1.4.1
R_λ	Taylor-Skala-Reynolds-Zahl
$S_{\ell/t}^n(r)$	Longitudinale/transversale Strukturfunktion n -ter Ordnung, siehe Abschnitt 2.7
$T(k)$	Energietransfer
$T(k, p, q)$	Beiträge zum Energietransfer durch die Triade aus den Wellenzahlen k , p und q (siehe Abschnitt B.2)
$T_{2/4}(r)$	Zwei Terme, die in Gleichung (5.7) auftreten

Römische Kleinbuchstaben

a, b	In Diagrammen: Skalierungsfaktor bzw. Offset
$c_{0/1/2/3}^{l/q/k}$	Fit-Parameter des linearen/quadratischen/kubischen Fits an die bedingten Momente $M^{(n)}(v, r, \Delta r)$ zur Bestimmung der KramersMoyalKoeffizienten $D^{(n)}(v, r)$
d	In Angaben von Größen, die von der Dimensionalität des Systems abhängen: die Dimension.

Symbolverzeichnis

$d_{C/KL}(r_1, \Delta r)$	Gemittelte Abstandsmaße zum Vergleich der einfach und zweifach bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten, siehe Abschnitt 5.3
e_i	Einheitsvektor in Richtung der i -ten Komponente
l_c	Korrelationslänge des <i>Forcings</i> in der benutzten Simulation, siehe Abschnitt 5.1
l_{ME}	Markov-Einstein-Länge, siehe Abschnitte 3.1 und 5.3
ℓ	(Beliebige) Längenskala
r	Abstandsvektor
u	Geschwindigkeitsvektor
u_{rms}	Wurzel aus dem mittleren Quadrat (englisch: <i>root mean square</i>) einer Geschwindigkeitskomponente ($\langle u_i^2 \rangle^{1/2}$)
$v(r, t)$	Geschwindigkeitsinkrement, siehe Abschnitt 2.7
$v_{\ell/t}(r, t)$	Longitudinales/transversales Geschwindigkeitsinkrement, siehe Abschnitt 2.7
$p(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsdichte (engl. <i>probability density function</i> , pdf), siehe Abschnitt A.2
$p(\cdot; \cdot)$	Verbundwahrscheinlichkeitsdichte (engl. <i>joint probability density function</i> , jpdf), siehe Abschnitt A.2
$p(\cdot \cdot)$	Einfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte (engl. <i>conditional probability density function</i> , cpdf), siehe Abschnitt A.2
$p(\cdot \cdot; \cdot \dots)$	Mehrfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte (engl. <i>conditional probability density function</i> , cpdf), siehe Abschnitt A.2
t	Zeit
x	Ortsvektor

Griechische Großbuchstaben

Π	Zufallsvariable zum Vortizitätsinkrement ϖ
$\Pi(k)$	Energiefluss durch die Fourier-Mode k
Φ_{ij}	Fourier-Transformierte des Geschwindigkeitsautokorrelationstensors
Ω	Zufallsvariable zur Vortizität ω
$\Omega(t)$	Enstrophie

Griechische Kleinbuchstaben

α	Ordnung der Hyperviskosität, siehe Abschnitt 5.1
$\beta_{0/1}$	Fit-Parameter für den Fit an den Driftkoeffizienten $D^{(1)}(v, r)$, siehe Gl. (5.8), und für den Fit an das bedingte mittlere longitudinale Geschwindigkeitsinkrement $\langle v_{\ell}(r) \Pi \rangle$, siehe Gl. (6.3)

$\gamma_{0/1/2/3}$	Fit-Parameter für den Fit an den Diffusionskoeffizienten $D^{(2)}(v, r)$, siehe Gl. (5.9)
ε	Konstante Energiedissipation bzw. -injektion
λ	Taylor-Längenskala
λ_ℓ	Longitudinale Taylor-Längenskala
ν	Kinematische Viskosität
ξ	Zufallsvariable, siehe Abschnitt A.2
$\varpi(\mathbf{r}, t)$	Vortizitätsinkrement in zwei Dimensionen, siehe Abschnitt 4.4
σ	Standardabweichung
σ_∞	Standardabweichung des Geschwindigkeitsinkrements bei unendlichem Abstand, siehe Gleichung (5.1)
σ_∞^ϖ	Standardabweichung des Vortizitätsinkrements bei unendlichem Abstand, siehe Gleichung (6.2)
ω	Vortizität.
ω_{rms}	Wurzel aus dem mittleren Quadrat der Vortizität
Indizes	
$\cdot_\ell, \cdot_{\ell\ell}$	Longitudinaler Anteil
\cdot_t, \cdot_{tt}	Transversaler Anteil

Literaturverzeichnis

- Argyris et al. 1997 Argyris, J. ; Faust, G. ; Haase, M.: *Die Erforschung des Chaos. Eine Einführung für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Wiesbaden : Vieweg, 1997
- Batchelor 1953 Batchelor, G. K.: *The theory of homogenous turbulence*. Cambridge University Press, 1953
- Bernard 1999 Bernard, D.: Three-point velocity correlation functions in two-dimensional forced turbulence. In: *Physical Review E* **60** (1999), Nr. 5, S. 6184–6187. – DOI: 10.1103/PhysRevE.60.6184
- Boer und Shepherd 1983 Boer, G. J. ; Shepherd, T. G.: Large-Scale Two-Dimensional Turbulence in the Atmosphere. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* **40** (1983), Nr. 1, S. 164–184. – DOI: 10.1175/1520-0469(1983)040<0164:LSTDTI>2.0.CO;2
- Boffetta et al. 2000 Boffetta, G. ; Celani, A. ; Vergassola, M.: Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from Gaussian behavior. In: *Physical Review E* **61** (2000), Nr. 1, S. R29–R32. – DOI: 10.1103/PhysRevE.61.R29
- Bronstein und Semendjajew 1996 Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A. ; Zeidler, Eberhard (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, 1996
- Davidson 2004 Davidson, P. A.: *Turbulence – An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford : Oxford University Press, 2004
- Dunkel und Hänggi 2009 Dunkel, J. ; Hänggi, P.: Relativistic Brownian motion. In: *Physics Reports* **471** (2009), Nr. 1, S. 1–73. – DOI: 10.1016/j.physrep.2008.12.001
- van Dyke 1982 Dyke, M. van: *An Album of Fluid Motion*. Stanford : Parabolic Press, 1982
- Einstein 1905 Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: *Annalen der Physik* **17** (1905), 549–560. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2094597.image.r=annalen+der+physik.f554.langFR>
- Faber 1995 Faber, T. E.: *Fluid Dynamics for Physicists*. Cambridge University Press, 1995
- Feller 1959 Feller, W.: Non-Markovian Processes with the Semigroup Property. In: *Annals of Mathematical Statistics* **30** (1959), Nr. 4, 1252–1253. – DOI: 10.1214/aoms/1177706110
- Feller 1968 Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Bd. I. 3rd Edition. New York : Wiley, 1968
- Feller 1971 Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Bd. II. 3rd Edition. New York : Wiley, 1971
- Fjørtoft 1953 Fjørtoft, R.: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional non divergent flow. In: *Tellus* **5** (1953), S. 225–230. – Original lag Autor nicht vor; zitiert nach Lesieur (1997)
- Fokker 1914 Fokker, A. D.: Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld. In: *Annalen der Physik* **348** (1914), Nr. 5, 810–820. –

- DOI: 10.1002/andp.19143480507
- Friedrich 2007 Friedrich, R.: *Turbulenz*. 2007. – Mitschrift einer Vorlesung gehalten im WS 2007/08 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
- Friedrich und Peinke 1997a Friedrich, R. ; Peinke, J.: Description of a Turbulent Cascade by a Fokker-Planck Equation. In: *Physical Review Letters* **78** (1997), Nr. 5, S. 863–866. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.863
- Friedrich und Peinke 1997b Friedrich, R. ; Peinke, J.: Statistical properties of a turbulent cascade. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* **102** (1997), Nr. 1–2, 147–155. – DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00235-7
- Friedrich et al. 2009 Friedrich, R. ; Peinke, J. ; Reza Rahimi Tabar, M.: Fluctuations. In: Meyers, R. A. (Hrsg.): *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. 1st Edition. Springer, 2009, 3574–3597
- Friedrich et al. 2002 Friedrich, R. ; Renner, Ch. ; Siefert, M. ; Peinke, J.: Comment on “Indispensable Finite Time Corrections for Fokker-Planck Equations from Time Series Data”. In: *Physical Review Letters* **89** (2002), Nr. 14, S. 149401. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.149401
- Friedrich et al. 1998 Friedrich, R. ; Zeller, J. ; Peinke, J.: A note on three-point statistics of velocity increments in turbulence. In: *EPL (Europhysics Letters)* **41** (1998), Nr. 2, 153-158. <http://stacks.iop.org/0295-5075/41/153>
- Frisch 1996 Frisch, U.: *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996
- Gardiner 2004 Gardiner, C. W.: *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences (Springer Series in Synergetics)*. 3rd Edition. Springer, 2004
- Gottschall und Peinke 2008 Gottschall, J. ; Peinke, J.: On the definition and handling of different drift and diffusion estimates. In: *New Journal of Physics* **10** (2008), Nr. 8, 083034 (20pp). <http://stacks.iop.org/1367-2630/10/083034>
- Haken 1977 Haken, H.: *Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology*. Springer, 1977
- Heisenberg 1948 Heisenberg, Werner: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. In: *Zeitschrift für Physik* **124** (1948), Nr. 7, 628–657. – DOI: 10.1007/BF01668899
- Kamps und Friedrich 2008 Kamps, O. ; Friedrich, R.: Lagrangian statistics in forced two-dimensional turbulence. In: *Physical Review E* **78** (2008), Nr. 3, 036321. – DOI: 10.1103/PhysRevE.78.036321
- Kamps 2009 Kamps, Oliver: *Lagrangesche Statistik in turbulenten Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Doktorarbeit, 2009
- von Kármán und Howarth 1938 Kármán, T. von ; Howarth, L.: On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **164** (1938), Nr. 917, 192–215. <http://www.jstor.org/stable/97087>
- Kelvin 1887 Kelvin, Lord: On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid. In: *Phil. Mag.* **24** (1887), S. 342–353. – Original lag Autor nicht vor, zitiert nach Frisch (1996)
- Kolmogorov 1931 Kolmogorov, A.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: *Mathematische Annalen* **104** (1931), Nr. 1, 415–458. –

- DOI: 10.1007/BF01457949
- Kolmogorov 1941a Kolmogorov, A. N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 30 (1941), Nr. 4, S. 299–303. – Russisch, englische Übersetzung wiederabgedruckt in Kolmogorov (1991)
- Kolmogorov 1991 Kolmogorov, A. N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences* 434 (1991), Nr. 1890, 15–17. – DOI: 10.1098/rspa.1991.0075
- Kolmogorov 1991 Kolmogorov, A. N.: The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. In: *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences* 434 (1991), Nr. 1890, 9–13. – DOI: 10.1098/rspa.1991.0075
- Kolmogorov 1941b Kolmogorov, Andrey N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 32 (1941), Nr. 1, S. 16–18. – Russisch, englische Übersetzung wiederabgedruckt in Kolmogorov (1991)
- Kraichnan 1959 Kraichnan, R. H.: The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. In: *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive* 5 (1959), Nr. 04, 497–543. – DOI: 10.1017/S0022112059000362
- Kraichnan 1967 Kraichnan, R. H.: Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. In: *Physics of Fluids* 10 (1967), Nr. 7, 1417–1423. – DOI: 10.1063/1.1762301
- Kramers 1940 Kramers, H. A.: Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. In: *Physica* 7 (1940), Nr. 4, 284 - 304. – DOI: 10.1016/S0031-8914(40)90098-2
- Kullback und Leibler 1951 Kullback, S. ; Leibler, R. A.: On Information and Sufficiency. In: *Annals of Mathematical Statistics* 22 (1951), Nr. 1, 79–86.
<http://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177729694>
- Landau und Lifshitz 1987 Landau, L. D. ; Lifshitz, E. M.: *Fluid Mechanics: Vol 6 (Course of Theoretical Physics)*. 2nd Edition. Pergamon Press, 1987
- Lee 1951 Lee, T. D.: Difference between Turbulence in a Two-Dimensional Fluid and in a Three-Dimensional Fluid. In: *Journal of Applied Physics* 22 (1951), Nr. 4, 524–524. – DOI: 10.1063/1.1699997
- Lesieur 1997 Lesieur, M.: *Turbulence in Fluids*. 3rd Edition. Kluwer Academic Publishers, 1997
- Lévy 1949 Lévy, Paul: Exemples de processus pseudo-Markoviens. In: *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 228 (1949), Nr. 26, S. 2004–2006
- Lilly 1969 Lilly, D. K.: Numerical Simulation of Two-Dimensional Turbulence. In: *Physics of Fluids* 12 (1969), Nr. 12, II-240–II-249. – DOI: 10.1063/1.1692444
- Lück et al. 1999 Lück, St. ; Peinke, J. ; Friedrich, R.: Uniform Statistical Description of the Transition between Near and Far Field Turbulence in a Wake Flow. In: *Physical Review Letters* 83 (1999), Nr. 26, S. 5495–5498. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.5495
- Lück et al. 2006 Lück, St. ; Renner, Ch. ; Peinke, J. ; Friedrich, R.: The Markov-Einstein coherence length—a new meaning for the Taylor length in turbulence. In: *Physics Letters A* 359 (2006), Nr. 5, 335–338. – DOI: 10.1016/j.physleta.2006.06.053
- Lundgren 1967 Lundgren, T. S.: Distribution Functions in the Statistical Theory of

- Turbulence. In: *Physics of Fluids* 10 (1967), Nr. 5, 969-975. – DOI: 10.1063/1.1762249
- Monin 1967 Monin, A. S.: Equations of turbulent motion. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31 (1967), Nr. 6, 1057 - 1068. – DOI: 10.1016/0021-8928(67)90210-9
- Moyal 1949 Moyal, J. E.: Stochastic Processes and Statistical Physics. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 11 (1949), Nr. 2, 150–210. <http://www.jstor.org/stable/2984076>
- Naert et al. 1997 Naert, A. ; Friedrich, R. ; Peinke, J.: Fokker-Planck equation for the energy cascade in turbulence. In: *Physical Review E* 56 (1997), Nr. 6, S. 6719–6722. – DOI: 10.1103/PhysRevE.56.6719
- Navier 1823 Navier, C. L. M. H.: Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. In: *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France* 6 (1823), 389–440. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x.image.f577>
- Nawroth und Peinke 2006 Nawroth, A.P. ; Peinke, J.: Small scale behavior of financial data. In: *The European Physical Journal B* 50 (2006), Nr. 1-2, 147-151. – DOI: 10.1140/epjb/e2006-00120-3
- Novikov 1967 Novikov, E. A.: Kinetic equations for vorticity field. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 177 (1967), Nr. 2, S. 299–302. – Original lag Autor nicht vor, zitiert nach Novikov (1993)
- Novikov 1993 Novikov, E. A.: A new approach to the problem of turbulence, based on the conditionally averaged Navier-Stokes equations. In: *Fluid Dynamics Research* 12 (1993), Nr. 2, 107–126. – DOI: DOI: 10.1016/0169-5983(93)90108-M
- Obukhov 1941a Obukhov, A. M.: On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. In: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 32 (1941), Nr. 1, S. 22–24. – Original lag Autor nicht vor, zitiert nach Frisch (1996)
- Obukhov 1941b Obukhov, A. M.: Spectral energy distribution in a turbulent flow. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Geogr. Geofiz.* 5 (1941), Nr. 4–5, S. 453–466. – Original lag Autor nicht vor, zitiert nach Frisch (1996)
- Ogura 1962 Ogura, Y.: Energy Transfer in a Normally Distributed and Isotropic Turbulent Velocity Field in Two Dimensions. In: *Physics of Fluids* 5 (1962), Nr. 4, 395-401. – DOI: 10.1063/1.1706631
- Onsager 1949 Onsager, L.: Statistical Hydrodynamics. In: *Nuovo Cimento Supplement* 6 (1949), Nr. 2, S. 279–287. – DOI: 10.1007/BF02780991
- Paret und Tabeling 1997 Paret, J. ; Tabeling, P.: Experimental Observation of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade. In: *Physical Review Letters* 79 (1997), Nr. 21, S. 4162–4165. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.4162
- Paret und Tabeling 1998 Paret, J. ; Tabeling, P.: Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: Experimental observations. In: *Physics of Fluids* 10 (1998), Nr. 12, 3126-3136. – DOI: 10.1063/1.869840
- Pawula 1967 Pawula, R. F.: Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planck Equation. In: *Physical Review* 162 (1967), Nr. 1, S. 186–188. – DOI: 10.1103/PhysRev.162.186
- Peinke et al. 1993 Peinke, J. ; Klein, M. ; Kittel, A. ; Okninsky, A. ; Parisi, J. ; Roessler, O. E.: On chaos, fractals and turbulence. In: *Physica Scripta* T49B (1993), 672-676.

- <http://stacks.iop.org/1402-4896/T49B/672>
- Planck 1917 Planck, M.: Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie. In: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin* (1917). – Original lag Autor nicht vor, zitiert nach Dunkel und Hänggi (2009)
- Pope 2000 Pope, S. B.: *Turbulent Flows*. 1st Edition. Cambridge University Press, 2000
- Ragwitz und Kantz 2001 Ragwitz, M. ; Kantz, H.: Indispensable Finite Time Corrections for Fokker-Planck Equations from Time Series Data. In: *Physical Review Letters* **87** (2001), Nr. 25, S. 254501. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.254501
- Renner 2002 Renner, Christoph: *Markowanalysen stochastisch fluktuierender Zeitserien*, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Doktorarbeit, Januar 2002
- Renner et al. 2001 Renner, Christoph ; Peinke, J. ; Friedrich, R.: Experimental indications for Markov properties of small-scale turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* **433** (2001), S. 383–409
- Reynolds 1895 Reynolds, O.: On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* **186** (1895), 123–164.
<http://www.jstor.org/stable/90643>
- Richardson 1922 Richardson, Lewis F.: *Weather prediction by numerical process*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1922. – Original lag Autor nicht vor, zitiert nach Frisch (1996)
- Risken 1996 Risken, H.: *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications (Springer Series in Synergetics)*. 2. Auflage. Springer, 1996
- Robertson 1940 Robertson, H. P.: The invariant theory of isotropic turbulence. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **36** (1940), Nr. 02, 209–223. – DOI: 10.1017/S0305004100017199
- Rose und Sulem 1978 Rose, H. A. ; Sulem, P. L.: Fully developed turbulence and statistical mechanics. In: *Journal de Physique France* **39** (1978), Nr. 5, 441-484. – DOI: 10.1051/jphys:01978003905044100
- Siefert und Peinke 2004 Siefert, M. ; Peinke, J.: Different cascade speeds for longitudinal and transverse velocity increments of small-scale turbulence. In: *Physical Review E* **70** (2004), Nr. 1, S. 015302. – DOI: 10.1103/PhysRevE.70.015302
- Siefert und Peinke 2006 Siefert, M. ; Peinke, J.: Joint multi-scale statistics of longitudinal and transversal increments in small-scale wake turbulence. In: *Journal of Turbulence* **7** (2006), N50. <http://www.informaworld.com/10.1080/14685240600677673>
- Siggia und Aref 1981 Siggia, E. D. ; Aref, H.: Point-vortex simulation of the inverse energy cascade in two-dimensional turbulence. In: *Physics of Fluids* **24** (1981), Nr. 1, 171-173. – DOI: 10.1063/1.863225
- Sivia und Skilling 2006 Sivia, D. ; Skilling, J.: *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. 2nd Edition. Oxford University Press, 2006
- von Smoluchowski 1906 Smoluchowski, M. von: Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. In: *Annalen der Physik* **326** (1906), Nr. 14, 756–780. – DOI: 10.1002/andp.19063261405
- von Smoluchowski 1916 Smoluchowski, M. von: Über Brownsche Molekularbewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren Zusammenhang mit der

- verallgemeinerten Diffusionsgleichung. In: *Annalen der Physik* **353** (1916), Nr. 24, 1103–1112. – DOI: 10.1002/andp.19163532408
- Stokes 1843 Stokes, G. G.: On some cases of Fluid Motion. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **8** (1843), S. 105. – siehe auch Stokes (1880, S. 17–68)
- Stokes 1880 Stokes, G. G.: *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes*. Bd. I. Cambridge Univ. Press, 1880
- Strogatz 2001 Strogatz, Steven H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 1st Edition. Westview Press, 2001
- Strumik und Macek 2008 Strumik, M. ; Macek, W. M.: Testing for Markovian character and modeling of intermittency in solar wind turbulence. In: *Physical Review E* **78** (2008), Nr. 2, 026414. – DOI: 10.1103/PhysRevE.78.026414
- Taylor 1935 Taylor, G. I.: Statistical Theory of Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **151** (1935), Nr. 873, 421–444. <http://www.jstor.org/stable/96557>
- Temple 1960 Temple, G. F. J.: *Cartesian Tensors: An Introduction*. London : Methuen & Co Ltd, 1960
- Tutkun und Mydlarski 2004 Tutkun, M ; Mydlarski, L: Markovian properties of passive scalar increments in grid-generated turbulence. In: *New Journal of Physics* **6** (2004), 49. <http://stacks.iop.org/1367-2630/6/49>
- Uhlenbeck und Ornstein 1930 Uhlenbeck, G. E. ; Ornstein, L. S.: On the Theory of the Brownian Motion. In: *Physical Review* **36** (1930), Nr. 5, S. 823–841. – DOI: 10.1103/PhysRev.36.823
- Waechter et al. 2004 Waechter, M. ; Kouzmitchev, A. ; Peinke, J.: Increment definitions for scale-dependent analysis of stochastic data. In: *Physical Review E* **70** (2004), Nr. 5, S. 055103. – DOI: 10.1103/PhysRevE.70.055103
- von Weizsäcker 1948 Weizsäcker, C. F.: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen. In: *Zeitschrift für Physik* **124** (1948), Nr. 7, 614–627. – DOI: 10.1007/BF01668898
- Wilcoxon 1945 Wilcoxon, F.: Individual Comparisons by Ranking Methods. In: *Biometrics Bulletin* **1** (1945), Nr. 6, 80–83. <http://www.jstor.org/stable/3001968>
- Wilczek 2007 Wilczek, M.: *Kohärente Strukturen in turbulenten Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, Februar 2007

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt und, außer den angegebenen, keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im August 2009